M 1125 ZÁKLADY MATEMATIKY

CVIČENÍ

Podzimní semestr 2010

.

ÚVOD.

Ve cvičení k předmětu M 1125 Základy matematiky se používá učební text : Pavel Horák, Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I., vydaný přírodovědeckou fakultou Masarykovy univerzity. Tento učební text je běžně dostupný a je možno jej zakoupit na přírodovědecké fakultě MU.

Zmíněný učební text byl původně určen pro dvousemetrální základní přednášku v učitelském studium s matematikou na přírodovědecké a pedagogické fakultě MU. Pro současné cvičení v předmětu M 1125 Základy matematiky se používá zhruba první polovina tohoto učebního textu. Vzhledem k tomu, že v něm nejsou zahrnuta některá témata, která nyní do předmětu Základy matematiky patří, vznikla potřeba původní učební text doplnit.

Na následujících několika stránkách je původní učební text doplněn o dva paragrafy části II. Cvičení, a sice jeden paragraf kapitoly 1., nazvané Opakování a doplnění středoškolské látky a jeden paragraf kapitoly 2., nazvané Základní algebraické struktury. Odpovídajícím způsobem je potom doplněna i část III. Výsledky a návody k řešení. Rozměrově i graficky je tento doplňující text stejný se skripty Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I. Je tedy možné si jej například vytisknout a do uvedených skript vložit.

Ve cvičení ze Základů matematiky se nejprve opakuje a mírně rozšiřuje středoškolská látka z matematiky. Při tom se předpokládá znalost pouze těch nejzákladnějších středoškolských matematických pojmů, vztahů a vzorců. Na následující straně jsou přehledně uvedeny některé z nich. Tyto vztahy a vzorce (a samozřejmě i některé další) je třeba nejenom bezpečně znát nazpaměť, ale také je nutné je umět i aktivně používat, a to jak ”zleva doprava”, tak i ”zprava doleva”.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ \dots \ + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$

$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ \dots \ + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n b^n$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \qquad \cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.

II. CVIČENÍ

DODATEK KE KAPITOLE 1

§ 8 : KOMPLEXNÍ ČÍSLA

[1.8.B1]. Vypočítejte a výsledek napište v algebraickém tvaru :

a) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{\sqrt{5}+3i}{1+2i}$ b) $\left(\dfrac{1+2i}{1-2i}\right)^2 - \left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2$.

[1.8.B2]. Popište a znázorněte náčrtkem množinu všech komplexních čísel z, pro která platí :

a) $|\, z+2-3i \,| < 3$ b) $\overline{z} = -iz$

c) $|\, z-i \,| = |\, z+2 \,|$ d) $\overline{z} = \dfrac{4}{z}$.

[1.8.B3]. V oboru komplexních čísel řešte rovnici :

a) $|\, z \,| - z = 1+2i$ b) $z^2 = z + \overline{z}$.

[1.8.B4]. V závislosti na parametru $p \in \mathbf{R}$ popište množinu všech komplexních čísel z, splňujících rovnici

$$\left|\, \frac{z-1}{z+1} \,\right| = p\,.$$

[1.8.B5]. Napište v goniometrickém tvaru komplexní číslo z, je-li :

a) $z = i - \sqrt{3}$ b) $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

c) $z = -\sin\alpha + i\cdot\cos\alpha$ d) $z = \dfrac{\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha}{2\cos\beta + 2\,i\cdot\sin\beta}$.

[1.8.B6]. Užitím Moivreovy věty spočtěte komplexní číslo z a výsledek napište v algebraickém tvaru. Při tom :

a) $z = \left(\dfrac{i\cdot\sqrt{3}-1}{2}\right)^{23}$ b) $z = \left(1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6$

Návod : při b) převeďte na poloviční úhly.

[1.8.B7]. Nalezněte všechna přirozená čísla n, pro která platí :

$$(1+i)^n = (1-i)^n\,.$$

[1.8.B8]. Užitím Moivreovy věty a binomické věty odvoďte vzorce pro :

a) $\sin 2\alpha\,,\ \cos 2\alpha$ b) $\sin 3\alpha\,,\ \cos 3\alpha$.

[1.8.B9]. V oboru komplexních čísel nalezněte všechny n–té odmocniny z komplexního čísla c a výsledky vyjádřete v algebraickém tvaru. Při tom :

a) $n = 6\,;\ c = -1$ b) $n = 4\,;\ c = -\dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[1.8.B10]. V oboru komplexních čísel řešte binomickou rovnici a všechna její řešení napište v algebraickém tvaru.

a) $z^3 + 5 = 0$ b) $z^4 + 64 = 0$.

[1.8.B11]. V oboru komplexních čísel nalezněte všechny n–té odmocniny z komplexního čísla c a výsledky vyjádřete v goniometrickém tvaru. Při tom :

a) $n = 5\,;\quad c = \dfrac{(\sqrt{3}-i\,)^8\cdot i}{(-1+i\,)^6\cdot(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,)}$

b) $n = 8\,;\quad c = \dfrac{(1-i\,)^6\cdot(1+i\sqrt{3}\,)}{-\,(\sin\alpha + i\cos\alpha\,)^3}$

c) $n = 6\,;\quad c = \dfrac{(2+i\sqrt{12}\,)^4\cdot(1+i\,)^2}{i\sqrt{3}-1}$

d) $n = 3\,;\quad c = \dfrac{(\sqrt{3}+i\,)^6\cdot(\cos\alpha + i\,\sin\alpha\,)^5}{2\cdot(-1+i\,)^4\cdot(\cos\alpha - i\,\sin\alpha\,)^2}$.

[1.8.B12]. Napište v algebraickém tvaru a nakreslete všechny n–té odmocniny z jedné, pro :

a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$ d) $n = 8$.

DODATEK KE KAPITOLE 2.

§ 5 : HOMOMORFIZMY ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR

[2.5.A1]. U. p. zobrazení $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q}$, které
a) je homomorfizmem grupoidu $(\mathbf{N}, +)$ do grupoidu $(\mathbf{Q}, \cdot)$
b) není homomorfizmem grupoidu $(\mathbf{N}, +)$ do grupoidu $(\mathbf{Q}, \cdot)$.

[2.5.A2]. Jsou dány grupy $(\mathbf{Z}, +)$ a $(3{\cdot}\mathbf{Z}, +)$. U. p. dvou různých zobrazení $\varphi, \psi : \mathbf{Z} \longrightarrow 3{\cdot}\mathbf{Z}$, která jsou grupovými homomorfizmy.

[2.5.A3]. U. p. zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$, které
a) je homomorfizmem okruhu $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$
b) není homomorfizmem okruhu $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.

[2.5.A4]. Je dána gupa $(\mathbf{Z}, +)$. U. p. zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, které
a) je bijektivní, ale není homomorfizmem
b) je vnořením, ale není izomorfizmem.

[2.5.A5]. Je dáno těleso $(\mathbf{R}, +, \cdot)$. U.p. zobrazení $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, které
a) je bijektivní, ale není homomorfizmem
b) je homomorfizmem, ale není bijektivní.

[2.5.A6]. Rozhodněte, zda následující grupoidy jsou izomorfní :
a) $(\mathbf{N}, +)$ a $(\mathbf{N}, \cdot)$ b) $(\mathbf{Z}_6, +)$ a $(\mathbf{Z}_6, \cdot)$.

[2.5.A7]. Rozhodněte, zda následující grupy jsou izomorfní :
a) $(\mathbf{Z}, +)$ a $(\mathbf{R}, +)$ b) $(\mathbf{Z}, +)$ a $(S, +)$
kde S značí množinu všech sudých celých čísel.

[2.5.A8]. Rozhodněte, zda následující okruhy jsou izomorfní :
a) $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ b) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.

[2.5.A9]. Je dána grupa $(\mathbf{Z}, +)$. U.p. homomorfizmu $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ tak, že $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{-1, 0, 1\}$.

[2.5.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby zobrazení φ grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, \circ)$ bylo homomorfizmem.

♣ ♣ ♣

[2.5.B1]. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ je homomorfizmus, resp. vnoření, resp. izomorfizmus grupy $(\mathbf{Z}, +)$, je – li pro každé $x \in \mathbf{Z}$:
a) $\varphi(x) = 3{\cdot}x$
b) $\varphi(x) = x + 3$
c) $\varphi(x) = x^3$

[2.5.B2]. Jsou dány grupy $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$ a je definováno zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C} - \{0\}$, takto :

$$\varphi(a) = i^{\,a}, \qquad \text{pro každé } a \in \mathbf{Z}.$$

Dokažte, že φ je homomorfizmus a nalezněte jeho jádro a obraz .

[2.5.B3]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ je definováno takto :

$$\varphi(z) = |z|, \qquad \text{pro každé } z \in \mathbf{C} - \{0\}.$$

Dokažte, že φ je homomorfizmus grupy $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$ do grupy $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ a nalezněte jeho jádro a obraz.

[2.5.B4]. Nechť $p \in \mathbf{N}$ je pevné přirozené číslo. Definujeme zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_m$ takto : pro každé $a \in \mathbf{Z}$ je

$$\varphi(a) = C_r \qquad \text{kde } r \text{ je zbytek po dělení čísla } p{\cdot}a \text{ číslem } m.$$

Pak
1. dokažte, že φ je homomorfizmus grupy $(\mathbf{Z}, +)$ do grupy $(\mathbf{Z}_m, +)$
2. nalezněte jádro $\mathrm{Ker}\varphi$ pro následující hodnoty m a p :
   a) $m = 6$, $p = 5$
   b) $m = 6$, $p = 4$
   c) $m = 6$, $p = 3$
   d) pro obecné hodnoty m a p.

[2.5.B5]. Jsou dány grupy zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_{12}, +)$, $(\mathbf{Z}_4, +)$ a je definováno zobrazení $\varphi : \mathbf{Z}_{12} \longrightarrow \mathbf{Z}_4$, takto : pro každé $C_i \in \mathbf{Z}_{12}$ je

$$\varphi(C_i) = C_r, \quad \text{kde } r \text{ je zbytek po dělení čísla } i \text{ číslem } 4.$$

Dokažte, že φ je homomorfizmus a nalezněte jeho jádro a obraz .

[2.5.B6]. Dokažte, že grupy $(\mathbf{R}, +)$ a $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ jsou izomorfní, ale grupy $(\mathbf{Q}, +)$ a $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$ nejsou izomorfní.

[2.5.B7]. Dokažte, že dané dvě grupy nejsou izomorfní
a) $(\mathbf{Z}_6, +)$ a $(S_3, \circ)$,
kde S_3 značí množinu všech permutací na 3 – prvkové množině a $\circ$ značí skládání permutací (tj. skládání zobrazení)
b) $(\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2, \oplus)$ *a* $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, \oplus)$,
kde $\oplus$ značí sčítání po složkách podle příslušného modulu.

[2.5.B8]. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ je okruhovým homomorfizmem tělesa $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ a pokud ano, pak nalezněte jeho jádro a obraz. Při tom pro každé $x \in \mathbf{C}$ je:

a) $\varphi(x) = \overline{x}$,

b) $\varphi(x) = i \cdot x$,

c) $\varphi(x) = |x|$.

[2.5.B9]. Jsou dána číselná tělesa $(\mathbf{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ a $(\mathbf{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$,

kde $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

Dále je definováno zobrazení $\varphi : \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ takto:

$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}, \quad \text{pro každé } a + b\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

Dokažte, že φ je bijektivním zobrazením, ale není okruhovým homomorfizmem.

[2.5.B.10]. Dokažte, že číselná tělesa $(\mathbf{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ a $(\mathbf{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ nejsou izomorfní.

Návod: postupujte sporem; využijte toho, že $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 1$ a dále toho, že při izomorfizmu se 1 vždy zobrazí na 1.

III. VÝSLEDKY A NÁVODY K ŘEŠENÍ

DODATEK KE KAPITOLE 1

§ 8 : KOMPLEXNÍ ČÍSLA

[1.8.B1]. a) $\dfrac{6 + \sqrt{5}}{5} + \dfrac{8 - 2\sqrt{5}}{5}\, i$ b) $-\dfrac{48}{25}\, i$.

[1.8.B2]. a) vnitřek kruhu o středu $S = [-2, 3]$ a poloměru $r = 3$

b) přímka o rovnici $y = x$

c) osa úsečky $A = [-2, 0]$ $B = [0, 1]$, tj. přímka $y = -2x - \frac{3}{2}$

d) kružnice o středu $S = [0, 0]$ a poloměru $r = 2$.

[1.8.B3]. a) $z = \dfrac{3}{2} - 2i$ b) $z = 0$ nebo $z = 2$.

[1.8.B4]. Pro $p = 0$: prázdná množina;

pro $p = 1$: imaginární osa, tj. přímka o rovnici $x = 0$;

pro $p > 0 \wedge p \neq 1$: kružnice o středu $S = \left[\frac{1+p^2}{1-p^2}, 0\right]$ a poloměru $r = \left|\frac{2p}{1-p^2}\right|$.

[1.8.B5]. Absolutní hodnota a argument komplexního čísla z jsou:

a) $|z| = 2$, $\arg z = \frac{5}{6}\pi$ b) $|z| = 4$, $\arg z = \frac{5}{3}\pi$

c) $|z| = 1$, $\arg z = \alpha + \frac{\pi}{2}$ d) $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg z = \alpha + \beta$.

[1.8.B6]. a) $-\frac{1}{2} \cdot (1 + i\sqrt{3})$ b) -27.

[1.8.B7]. Všechna n tvaru: $n = 4k$, pro libovolné $k \geq 0$ celé.

Návod: nejprve převeďte obě strany rovnice na goniometrický tvar.

[1.8.B8]. a) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

b) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$.

Návod: komplexní číslo $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$, resp. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$ se rozepíše jednak podle Moivreovy věty a jednak podle binomické věty. Porovnáním reálných a imaginárních části obou vyjádření pak dostaneme požadované vzorce.

[1.8.B9]. a) $\pm\, i\,,\quad \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\,,\quad \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

b) $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\,,\quad \pm\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

[1.8.B10]. a) $-\sqrt[3]{5}\,,\quad \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\,(1+i\sqrt{3})\,,\quad \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\,(1-i\sqrt{3})$

b) $\pm\,(2+2i)\,,\quad \pm\,(2-2i)\,.$

[1.8.B11]. Označíme-li n-tou odmocninu ze zadaného komplexního čísla c symbolem z, pak je:

a) $|z|\,=\,2\,,\quad \arg z\,=\,\frac{\pi}{15}\,+\,k\cdot\frac{2}{5}\pi\,,\quad$ kde $k=0,1,2,3,4$

b) $|z|\,=\,\sqrt{2}\,,\quad \arg z\,=\,\frac{\pi}{24}\,+\,\frac{3}{8}\alpha\,+\,k\cdot\frac{\pi}{4}\,,\quad$ kde $k=0,1,2,3,4,5,6,7$

c) $|z|\,=\,2\sqrt[3]{2}\,,\quad \arg z\,=\,\frac{7}{36}\pi\,+\,k\cdot\frac{\pi}{3}\,,\quad$ kde $k=0,1,2,3,4,5$

d) $|z|\,=\,2\,,\quad \arg z\,=\,\frac{7}{3}\alpha\,+\,k\cdot\frac{2}{3}\pi\,,\quad$ kde $k=0,1,2\,.$

[1.8.B12]. a) $1\,,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1\,,\ i\,,\ -1\,,\ -i$

c) $\pm 1\,,\quad \frac{1}{2}\,\pm\,i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad -\frac{1}{2}\,\pm\,i\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\pm 1\,,\quad \pm\, i\,,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pm\,i\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pm\,i\frac{\sqrt{2}}{2}$

a nakreslení příslušných obrázků.

DODATEK KE KAPITOLE 2

§ 5: HOMOMORFIZMY ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR

[2.5.A6]. a) ne, b) ne **[2.5.A7].** a) ne, b) ano **[2.5.A8].** a) ne, b) ne

[2.5.A9]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.5.B1]. a) φ je vnoření, není izomorfizmus,
b) φ není homomorfizmus,
c) φ není homomorfizmus.

[2.5.B2]. $\mathrm{Ker}\,\varphi\,=\,4\cdot\mathbf{Z}\,=\,\{4k\mid k\in\mathbf{Z}\}\,,\quad \mathrm{Im}\,\varphi\,=\,\{1\,,\,i\,,-1\,,-i\,\}\,.$

[2.5.B3]. Jádro sestává ze všech čísel, která leží na jednotkové kružnici, tzn. $\mathrm{Ker}\,\varphi\,=\,\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$ a obraz $\mathrm{Im}\,\varphi=\mathbf{R}^+$, tzn. zobrazení φ je surjektivní.

[2.5.B4]. 2. a) $Ker\,\varphi=6\cdot\mathbf{Z}\,,$

b) $Ker\,\varphi=3\cdot\mathbf{Z}\,,$

c) $Ker\,\varphi=2\cdot\mathbf{Z}\,,$

d) $Ker\,\varphi=\frac{m}{(m,p)}\cdot\mathbf{Z}$, kde (m,p) je největší společný dělitel čísel m,p.

[2.5.B5]. $Ker\,\varphi=\{\,C_0\,,\,C_4\,,\,C_8\,\}\,.$

[2.5.B6]. Například zobrazení $\varphi:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^+$, definované: $\varphi(x)=e^x$ je izomorfizmus.
Druhá část se dokáže sporem. Je-li $\varphi:\mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{Q}^+$ izomorfizmus, pak existuje $a\in\mathbf{Q}$ tak, že $\varphi(a)=2$, odkud úpravou dostaneme

$$2=\varphi(a)=\varphi(\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{2})=\varphi(\tfrac{a}{2})\cdot\varphi(\tfrac{a}{2})=\left[\varphi(\tfrac{a}{2})\right]^2\implies\sqrt{2}=\varphi(\tfrac{a}{2})\in\mathbf{Q}\,,$$

což je spor.

[2.5.B7]. a) stačí si všimnout toho, že jedna grupa je komutativní a druhá nekomutativní
b) při libovolném homomorfizmu φ se prvky (C_2,C_0) a (C_0,C_0) vždy zobrazí na (C_0,C_0,C_0), (sami podrobně rozepište). Zobrazení φ pak není injektivní a nemůže se tedy jednat o izomorfizmus.

[2.5.B8]. a) φ je homomorfizmus, $\quad Ker\,\varphi=\{0\}\,,\quad Im\,\varphi=\mathbf{C}$
b) φ není homomorfizmus,
c) φ není homomorfizmus.

[2.5.B9]. φ je bijektivní (dokáže se rozepsáním) a φ není homomorfizmem, neboť například

$$\varphi(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=\varphi(2)=2\,,\ \text{ ale }\ \varphi(\sqrt{2})\cdot\varphi(\sqrt{2})=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3\,.$$

[2.5.B10]. Sporem; nechť $\varphi:\mathbf{Q}(\sqrt{2})\longrightarrow\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ je izomorfizmus. Pak: $\varphi(2)=\varphi(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=\varphi(\sqrt{2})\cdot\varphi(\sqrt{2})=(a+b\sqrt{3})\cdot(a+b\sqrt{3})=(a^2+3b^2)+2ab\sqrt{3}$ a zároveň také $\varphi(2)=\varphi(1+1)=\varphi(1)+\varphi(1)=1+1=2\,.$

Je tedy $(a^2+3b^2)+2ab\sqrt{3}=2$, odkud úpravou dostaneme, že číslo $\sqrt{3}$ je racionální, což je požadovaný spor.