Masarykova univerzita

Základní matematické metody ve fyzice 1

Zápisky z přednášek

Brno 2012

Jakub Juránek

Obsah

1 Derivace a integrál funkce jedné reálné proměnné

funkce je zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1 Derivace

obrázek

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Definice
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce definována v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nějakém jeho okolí $(a - \gamma, a + \delta)$.
Pokud existuje limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, nazýváme ji derivací funkce f v bodě a, značíme $f'(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_a$, $\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$.
Geometrický význam derivace: směrnice tečny v daném bodě.

obrázek
Sečna prochází body $[a, f(a)], [a + h, f(a + h)]$.

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

derivace:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

Sečna v limitním případě přejde v tečnu.

V extrému pokud existuje derivace, pak je rovna nule.
v x_0 extrém $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
Opačná implikace obecně neplatí $\not\Leftarrow$.
Např. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, ale v nule není extrém, viz obrázek.

Jak počítat derivace?

1. z definice
2. pravidla pro výpočet - Tab. 1 a Tab 2

x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x (a = e)$	$\frac{1}{x \ln a}$ $\left(\frac{1}{x}\right)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tab. 1

Nechť (Předpoklady)	Pak (Důsledky)
$h(x) = f(x) \pm g(x)$, existují $f'(x_0), g'(x_0)$	$h'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
$h(x) = f(x) \cdot g(x)$, existují $f'(x_0), g'(x_0)$	$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
$h(x) = \frac{f(x)}{tg(x)}$ existují $f'(x_0), g'(x_0)$, existuje okolí bodu x_0 tak, že pro $\forall x \in o(x_0)$ platí $g(x) \neq 0$	$h'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
$h(x) = f\big(g(x)\big)$ existují $f'\big(g(x_0)\big), g'(x_0)$	$h'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$

Tab. 2

1.2 Integrály

Bartsch: Matematické vzorce
Integrování - „opačný proces k derivování“
Definice
Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na otevřeném intervalu $I = (a, b)$.
Pokud pro všechny body $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$, pak funkci $F(x)$ nazýváme primitivní funkcí k $f(x)$ a značíme

$$F(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

Platí, že ke každé spojité funkci existuje primitivní funkce.

Pokud primitivní funkce existuje, kolik jich je?
$f(x) \ldots$ předp. $F(x), G(x)$ jsou primitivní funkce: $F'(x) = f(x), G'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} F'(x) - G'(x) &= 0 \\ (F(x) - G(x))' &= 0 \\ F(x) - G(x) &= \text{konst.} \Rightarrow F(x) = G(x) + \text{konst.} \end{aligned}$$

Pokud promitivní funkce existuje, je jich nekonečně mnoho a liší se o konstantu.

Jak určovat primitivní funkci?

- Opačně přečíst Tab. 1
- Pravidla:

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x))\, \mathrm{d}x &= \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x \\ \int c \cdot f(x)\, \mathrm{d}x &= c \cdot \int f(x)\, \mathrm{d}x, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (konstanta)} \end{aligned}$$

- Integrační postupy

(PP) metoda per partes
(SM1) substituční metoda I
(SM2) substituční metoda II

1.2.1 Metoda per partes

$u(x), v(x)$ reálné funkce

$$\begin{aligned}
[u(x)\cdot v(x)]' &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) / \int \text{(pokud integrály existují)} \\
u(x)\cdot v(x) &= \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \\
\underbrace{\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{chceme, ale nevíme jak}} &= u(x)\cdot v(x) - \underbrace{\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{víme jak}}
\end{aligned}$$

Hodí se ($P(x)$ je polynom):

$$\int P(x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\int P(x)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\int P(x)\cdot e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin x\cdot e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos x\cdot e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

1.2.2 Substituční metoda I

Počítáme $\int f(x)g(x)$, předpokládejme

$$f(x) = \underbrace{\varphi'(x)\cdot g(\varphi(x))}_{\text{vypadá to jako derivace složené funkce}}$$

Hra: označme si $t = \varphi(x)$
Hledejme primitivní funkci k funkci $g(\varphi(x)) = g(t)$
Označme ji $G(t)$ (prim. fce ke $g(t)$)
Počítejme:

$$G'(t) = [G(\varphi(x))]' = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \varphi'(x)g(t) = \varphi'(x)g(\varphi(x)) = f(x)$$

$$\underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{máme počítat, nevíme jak}} = \underbrace{\int \varphi'(x)g(\varphi(x))}_{\text{tento tvar má integrovaná funkce}} = G(\varphi(x)) = G(t) = \underbrace{\int g(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{spočítá se snadněji}}$$

$$\underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{obtížný}} = \underbrace{\int g(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{snadněji}}$$

Obecně, pokud $f(x) = R(\sin x, \cos x)$

- lichý k sinu: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, substituce $t = \cos x$
- lichý ke cosinu: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, substituce $t = \sin x$

1.2.3 Substituční metoda II

Máme počítat $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, zatím nevíme jak
Zvolíme $x = \psi(t)$
Označme $F(x)$ prim. fci k $f(x)$
Položme $G(t) = F(\psi(t))$
Počítejme

$$G'(t) = [F(\psi(t))]' = \psi'(t)F'(x) = \psi'(t)f(x) = \underbrace{\psi'(t)f(\psi(t))}_{g(t)} = g(t)$$

Shrneme:

$$\underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{nevíme (zatím)}} \overset{x=\psi(t)}{=} F(x) = F(\psi(t)) = G(t) = \int g(t)\,\mathrm{d}t \ldots \text{převedli jsme na integrál, který lze spočítat snadněji}$$

$$g(t) = \psi'(t)f(\psi(t))$$

Porovnání substitučních metod:

SM1

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi'(x)g(\varphi(x)) = |t = \varphi(x)| = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

SM2

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = |x = \psi(t)| = \int g(t)\,\mathrm{d}t, \quad g(t) = \psi'(t)f(\psi(t))$$

Univerzálni goniometrická substituce (SM2)
$\int R(\cos x, \sin x)$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

1. $\cos x$ pomocí t
2. $\sin x$ pomocí t
3. vyjádřit x
4. vyjádřit dx

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\
\sin\frac{x}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x &= 2\operatorname{arctg} t \\
\mathrm{d}x &= \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

1.3 Určité integrály

Neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\ (+c)\ldots$ neurčenost - integrační konstanta
Úkol $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
Počítáme plochu pod grafem $P = ?$
Provedeme tzv. dělení intervalu: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$
Dělící interval $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$, na něm nabýva nejmenši hodnoty $min\ f_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle}$ a nejvetsi hodnoty $max\ f_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle}$.
Provedeme na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ a dostaneme:
Dolni součet příslušný funkci f a dělení $D = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{n} min\ f_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle}(t_{i+1} - t_i)$$

Jde o celkovou plochu spodních obdélníčků.
Horní součet příslušný funkci f a dělení $D = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$

$$U(f, D) = \sum_{i=0}^{n} max\ f_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle}(t_{i+1} - t_i)$$

Jde o celkovou plochu horních obdélníčků.

$$L(f, D) \leq P \leq U(f, D) \text{ pro všechna dělení } D$$

$\bar{D}$ zjemění dělení D

$$L(f, D) \leq L(f, \bar{D}) \leq P \leq U(f, \bar{D}) \leq U(f, D) \text{ pro vsechna dělení } D$$

Postupné zjemňování - horní a dolní součet splynou v integrál

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Newtonova-Leibnitzova formule:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Můžeme zavést i pro spočetně mnoho bodů nespojitosti.

2 Základy vektorové algebry, počítání s vektory

skalárni veliciny	-	čislo + jednotka (hmotnost, objem, dráha)
vektorové veličiny	-	směr a velikost + jednotka
tenzorové veličiny	-	ponecháme na konec 2. semestru

2.1 Opakování ze střední školy

vektor	-	geometrické zavedení
orientovaná úsečka	-	začíná v jednom bodě A a končí v druhém bodě B: $\overrightarrow{AB}$
nulová orientovaná úsečka	-	$A = B$: $\vec{o}, \vec{0}$
	-	nulový vektor
Konkretní orientovaná úsečka	-	vázaný vektor
volný vektor (vektor)	-	množina všech orientovaných úseček, které mají stejný směr, stejnou orientaci a stejnou velikost
délka vektoru	-	délka libovolné orientované úsečky, která vektor reprezentuje
sčítání vektorů $\vec{u} + \vec{v}$	-	zvolíme reprezentanty se společným počátkem, sčítáme přes rovnoběžník
násobení vektoru reálnym číslem	-	reprezentant vynásobíme absolutní hodnotou daného čísla, v případě záporného čísla změníme orientaci
soustava souřadnic	-	tři nekomplanárni přímky, které se protínaji v jednom bodě; na každou z přímek vyneseme meřící jednotku

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

speciálně	-	navzájem kolmé osy - ortogonální
	-	navzájem kolmé osy + stejná meřící jednotka - kartézská (ortonormální)

V kartézské soustavě souřadnic

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$u_1, u_2, u_3 \ldots$ složky vektoru v dané soustavě souřadnic (bázi)
$u_1\vec{i}, u_2\vec{j}, u_3\vec{k} \ldots$ průměty vektoru do jednotlivých souřadnicových os

V dané soustavě souřadnic $A = [x_A, y_A, z_A], B = [x_B, y_B, z_B]$, $\quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$
Plati:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_B - x_A \\ u_2 &= y_B - y_A \\ u_3 &= z_B - z_A \end{aligned}$$

Hantýrka: $\vec{u} = B - A$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, tak že:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\vec{u}_i$$

V Einsteinově sumační symbolice $\vec{v} = \alpha_i\vec{u}_i$, z kontextu: $1 \leq i \leq k$
Množina vektorů $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ je lineárně závislá, jestliže jeden z vektorů $\vec{w}_i$ (konkrétní) je lineární kombinací ostatních vektorů

Derivace vektoru $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, kde $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), u_3 = u_3(t)$
Píšeme: $\vec{u} = \vec{u}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}\right)$$

2.1.1 Skalární součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

Úhel dvou nenulových vektorů: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$
$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \measuredangle BAC$
$0° \leq \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180°$

Skalární součin: zobrazení, které každým dvěma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$ přiřadí realné číslo $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tak, že platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi & \text{oba vektory nenulové} \\ 0 & \text{alespoň jeden z vektorů nulový} \end{cases}$$

Příklady z fyziky: práce síly $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$, magnetický indukční tok $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

Platí (dá se dokázat):

1. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektory ortonormální báze

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{kroneckerovo delta}$$

2. $\forall \vec{u}, \vec{v} : \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} : \ k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$
4. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} : \ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
   $(4), (2) : \ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$

Ortonormální báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, v ní vyjádřené vektory

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 &= (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 &= (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Počítejme $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \cdot (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \overset{(4),(3)}{=} (u_1v_1)\underbrace{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1)}_{1} + (u_1v_2)\underbrace{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)}_{0} +$
$(u_1v_3)\underbrace{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)}_{0} + (u_2v_1)\underbrace{(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1)}_{0} + (u_2v_2)\underbrace{(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2)}_{1} + (u_2v_3)\underbrace{(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)}_{0} + (u_3v_1)\underbrace{(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1)}_{0} + (u_3v_2)\underbrace{(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2)}_{0} +$
$(u_3v_3)\underbrace{(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)}_{1} \overset{(1)}{=} u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u_iv_i \in \mathbb{R}$
Pouze ortonormální báze!

2.1.2 Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, označujeme jej $\vec{u} \times \vec{v}$, je zobrazení, které těmto vektorům přiradí vektor, a to takto:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{cases} \vec{w}, \quad |\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi,\ \vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v}, & \text{pokud } \vec{u}, \vec{v} \text{ jsou nenulové} \\ \qquad \text{orientace pomocí pravidla pravé ruky} & \\ \vec{o} & \text{alespoň jeden je nulový} \end{cases}$$

Příklady z fyziky: moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Platí (dá se dokázat):

1. v pravotočivé bázi
$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{o}$$
$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \end{aligned}$$

2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
   $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

4. $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}:\ k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$

Vyjádření vektorového součinu v ortonormální bázích
Ortonormální báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, v ní vyjádřené vektory

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 &= (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 &= (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Počítejme $\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \times (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \overset{(3),(4)}{=} (u_1v_1)(\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{\vec{o}}) + (u_1v_2)(\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3}) +$
$(u_1v_3)(\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2}) + (u_2v_1)(\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_3}) + (u_2v_2)(\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{\vec{o}}) + (u_2v_3)(\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1}) + (u_3v_1)(\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{\vec{e}_2}) + (u_3v_2)(\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{-\vec{e}_1}) +$
$(u_3v_3)(\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{\vec{o}}) \overset{(1),(2)}{=} (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$

V ortonormální pravotočivé bázi:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

2.2 Vektorové prostory

Dosud - vektory - geometrická představa - orientované úsečky

2.2.1 Definice vektorového prostoru nad množinou $\mathbb{R}$

Mějme množinu V (její prvky nazveme vektory) a na této množině definovanou operaci „+“ tak, že platí následující pravidla:

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ pro $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

(ii) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ pro $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

(iii) $\exists$ prvek, označme jej $\vec{o}$ takový, že $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$ pro $\forall \vec{a} \in V$

(iv) $\forall \vec{a} \in V$ existuje prvek, který označíme $(-\vec{a})$, tak, že platí $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$

Celkově $(V, +)$ je komutativní grupa.
Řekneme, že takováto množina $(V, +)$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$, jestliže dále platí:
ke $\forall k \in \mathbb{R}$ a $\forall \vec{a} \in V$ je definován vektor $k \cdot \vec{a} \in V$ tak, že je splněno

(v) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ pro $\forall k \in \mathbb{R}$ a $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

(vi) $(k + l) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$ pro $\forall k, l \in \mathbb{R}$ a $\forall \vec{a} \in V$

(vii) $(k \cdot l) \cdot \vec{a} = k \cdot (l \cdot \vec{a})$ pro $\forall k, l \in \mathbb{R}$ a $\forall \vec{a} \in V$

(viii) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ pro $\forall \vec{a} \in V$

K zadání vektorového prostoru je třeba zadat:

1. množinu V (nosná množina)
2. definovat operaci „+“ (sčítání vektorů)
3. definovat operaci „$\cdot$“ (nasobeni vektoru číslem)
4. ověření axiomů (i)-(viii)

Nulový vektorový prostor: $V = \{\vec{v}\}$, „+“: $\vec{v} + \vec{v} = \vec{v}$, „$\cdot$“: $\forall k \in \mathbb{R} : k \cdot \vec{v} = \vec{v}$

2.2.2 Definice skalárního součinu

$V \dots$ vektorový prostor
Řekneme, že zobrazení $V \times V \ni [\vec{u}, \vec{v}] \to \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ je skalárním součinem na vektorovém prostoru V, jestliže jsou splněny následující axiomy:

(i) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ pro $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

(ii) $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$ pro $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ pro $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ pro $\forall \vec{u} \in V$ rovnost $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = \vec{o}$

Vektorový prostor, na kterém je takto definován skalarní součin, se nazývá Euklidovský.
V matematice Euklidovský prostor i jako prostor bodů s určitou topologií.

Úhel dvou nenulových vektorů

$$\cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Velikost vektoru definujeme

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Úhel vektorů je vázaný na skalární součin.

$$\vec{u} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Jak je skalární součin zadán?

- $(V, +) \dots$ samotný vektorový prostor
- $[\vec{u}, \vec{v}] \to \vec{u} \cdot \vec{v}$
- ověření axiomů (i) - (iv)

3 Základy vektorové algebry v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, přechody mezi bázemi

$\left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \right\rangle$ je libovolná báze v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= u_1\vec{f}_1 + u_2\vec{f}_2 + u_3\vec{f}_3 = u_i\vec{f}_i \\
\vec{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\
u_1, u_2, u_3 &\quad \ldots \quad \text{složky vektoru v bázi } \left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \right\rangle \\
u_1\vec{f}_1, u_2\vec{f}_2, u_3\vec{f}_3 &\quad \ldots \quad \text{průměty vektoru do souřadných os (vektory)}
\end{aligned}$$

(1) : $\left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \right\rangle$ báze v $\mathbb{R}^3$

(2) : $\left\langle \vec{f}'_1, \vec{f}'_2, \vec{f}'_3 \right\rangle$ báze v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\vec{f}'_1 &= \tau_{11}\vec{f}_1 + \tau_{12}\vec{f}_2 + \tau_{13}\vec{f}_3 \\
\vec{f}'_2 &= \tau_{21}\vec{f}_1 + \tau_{22}\vec{f}_2 + \tau_{23}\vec{f}_3 \\
\vec{f}'_3 &= \tau_{31}\vec{f}_1 + \tau_{32}\vec{f}_2 + \tau_{33}\vec{f}_3
\end{aligned}$$

$$\vec{f}'_j = \tau_{ji}\vec{f}_i$$

Koeficienty

$$\tau_{\text{řádek,sloupec}}$$

Transformaci charakterizuje matice přechodu:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

3.1 Matice a počítání s nimi

Matice - uspořádání čísel do obdélníku.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \ldots \text{matice typu } m/n \left\{ \begin{array}{ll} m & \text{řádků} \\ n & \text{sloupců} \end{array} \right.$$

$i \ldots$ řádkový index, $1 \leq i \leq m$
$j \ldots$ sloupcový index, $1 \leq j \leq n$
Speciálně: čtvercová matice $m = n$.
Speciální typ čtvercové matice - jednotková matice (řádu n)

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

Sčítání matic

$$\left. \begin{array}{l} A = (a_{ij}) \text{ typu } m/n \\ B = (b_{ij}) \text{ typu } m/n \end{array} \right\} \text{stejné typy}$$

$C = A + B = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, C je typu m/n

Násobení matice reálným číslem
$A = (a_{ij})$, $k \in \mathbb{R}$
$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$

Násobení matic
$A = (a_{ij})$ typu m/n
$B = (b_{ij})$ typu n/p
$C = A \cdot B$ typu m/p

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$$

Platí:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \quad A$ typu m/n, B typu n/p, C typu p/q
2. $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2, \quad A$ typu m/n, B_1, B_2 typu n/p
3. $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B, \quad A_1, A_2$ typu m/n, B typu n/p
4. $A + B = B + A, \quad A, B$ typu m/n
5. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B), \quad A$ typu m/n, B typu n/p
6. $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$
7. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Regulární matice
čtvercová matice (řádu n)
Mějme matici $A = (a_{ij})$ řádu n. Řekneme, že matice A je regulární, jestliže k ní existuje inverzní matice. V opačném případě nazveme matici A singulární.
Řekneme, že matice A^{-1} řádu n je inverzní k matici A, jestliže platí $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$.

Hodnost matice
$A = (a_{ij})$ typu m/n

$$A = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) & \begin{array}{rl} 1. & \text{vektor} \\ \vdots & \\ i\text{-tý} & \text{vektor} \\ \vdots & \\ m\text{-tý} & \text{vektor} \end{array} \end{array}$$

Jedna z možných definic
Počet lineárně nezávislých vektorů reprezentujících řádky (řádků chápaných jako vektory).
Hodnost matice A značíme $h(A)$.

Jak hodnost určit?
Převed do schodovitého tvaru + spočítání nenulových řádků

Řekneme, že matice $A = (a_{ij})$ typu m/n je ve schodovitém tvaru, jestliže každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí.

Jak ji do schodovitého tvaru dostat?
Elementárními řádkovými (sloupcovými) úpravami

(i) vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem

(ii) přičtení k násobku i-tého řádku k j-tému řádku

Důsledek: výměna řádků matice

Výpočet inverzní matice (pokud existuje)
jedna z možností

1. zapíšeme zadanou matici a vedle ní jednotkovou matici téhož řádu

2. zadanou matici A převedeme EŘÚ na jednotkovou matici, tytéž úpravy provádíme s jednotkovou maticí

3. jednotková matice přejde v inverzní matici

$$(A|E_n) \sim \cdots \sim (E_n|A^{-1})$$

Determinant čtvercové matice řádu n
$A = (a_{ij})$

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P \in p} sgnP \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

$P \ldots$ konkrétní permutace z množiny všech permutací p sloupcových indexů
$P = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$, $n!$ možností

$$sgnP = \begin{cases} 1 & \text{v permutaci } P \text{ je sudý počet inverzí} \\ -1 & \text{v permutaci } P \text{ je lichý počet inverzí} \end{cases}$$

inverze = „menší číslo slojí za větším“

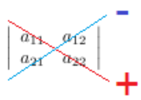
1. $n = 1$

$$A = (a_{11}), \quad |A| = a_{11}$$

2. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

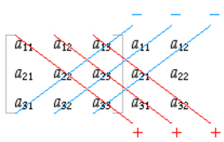
mnemotechnická pomůcka:



3. $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} |A| \quad = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

mnemotechnická pomůcka- Sarusovo pravidlo:



Poznámka
Vektorový součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$.
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v ortonormální bázi $\left\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\rangle$
formální determinant:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Důležité pravidlo pro čtvercové matice řádu n
Matice A je regulární $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $h(A) = n$

3.2 Matice přechodu mezi bázemi

Obecné báze v $\mathbb{R}^3$:

$$\left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \right\rangle \quad \underset{\underset{S = (\sigma_{ij})}{\longleftarrow}}{\overset{T = (\tau_{ij})}{\longrightarrow}} \quad \left\langle \vec{f}'_1, \vec{f}'_2, \vec{f}'_3 \right\rangle$$

Jaké mají matice T, S vlastnosti?
T, S jsou regulární

Jaký je vztah mezi T, S?

$$\vec{f}'_i = \tau_{ij} \vec{f}_j \qquad \vec{f}_k = \sigma_{ks} \vec{f}'_s$$

$$\vec{f}'_i = \tau_{ij} \vec{f}_j = \tau_{ij} \left(\sigma_{js} \vec{f}'_s \right) = \underbrace{\tau_{ij} \sigma_{js}}_{a_{is}} \vec{f}'_s = a_{is} \vec{f}'_s$$

Vyjádření vektoru v dané bázi je jednoznačné:

$$\left. \begin{array}{lcl} s = i & \Rightarrow & a_{is} = 1 \\ s \neq i & \Rightarrow & a_{is} = 0 \end{array} \right\} a_{is} = \delta_{is} \; A = (a_{is}) \text{ je jednotková matice}$$

$A = T \cdot S \Rightarrow T, S$ jsou navzájem inverzní

Jaký je vztah souřadnic téhož vektoru v čárkované a nečárkované bázi?

$$\left. \begin{array}{lclcl} \vec{u} & = & (u_1, u_2, u_3) & = & u_i \vec{f}_i \\ \vec{u} & = & (u'_1, u'_2, u'_3) & = & u'_j \vec{f}'_j \end{array} \right\} \vec{u} = u_i \vec{f}_i = u'_j \vec{f}'_j$$

$$\vec{u} = u_i \vec{f}_i = u_i \left(\sigma_{ij} \vec{f}'_j \right) = \underbrace{u_i \sigma_{ij}}_{u'_j} \vec{f}'_j = u'_j \vec{f}'_j \Rightarrow u'_j = u_i \sigma_{ij}$$

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot S \\ \text{analogicky} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{pmatrix} \cdot T \end{array}$$

Speciálně:
ortonormální báze

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \stackrel{T=(\tau_{ij})}{\longrightarrow} \langle \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\vec{e}\,'_1 &= \tau_{11}\vec{e}_1 + \tau_{12}\vec{e}_2 + \tau_{13}\vec{e}_3 \;/\cdot \vec{e}_2 \\
\vec{e}\,'_1 \cdot \vec{e}_2 &= \tau_{11}(\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0}) + \tau_{12}\vec{(}\underbrace{e_2 \cdot \vec{e}_2}_{1}) + \tau_{13}(\underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}_{0}) \\
\vec{e}\,'_1 \cdot \vec{e}_2 &= \tau_{12} \\
\text{zobecnění } \vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}_j &= \tau_{ij} \\
\text{analogicky } \vec{e}_j \cdot \vec{e}\,'_i &= \sigma_{ji}
\end{aligned}$$

T, S jsou tranponované

4 Obyčejné diferenciální rovnice
Rovnice 1. řádu

Proč?
mechanika:

$$\vec{a}(t) \text{ je dáno } \Rightarrow \vec{v}(t) = ? \quad \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}(t) \text{ je dáno } \Rightarrow \vec{r}(t) = ? \quad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

radioaktivní rozpad:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -N(t) \cdot \lambda \quad \text{(Ř)}$$

průchod záření látkou:

$$\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = -I(x) \cdot \mu$$

Ř:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} &= -N(t) \cdot \lambda \\ \int \frac{\mathrm{d}N}{N} &= \int -\lambda \, \mathrm{d}t \\ \ln|N| &= -\lambda t + \ln C \\ N &= C \cdot e^{\lambda t} \end{aligned}$$

4.1 Terminologie

Obyčejné diferenciální rovnice ... obyčejné derivace
1.řád ... derivace 1. řádu
Diferenciální rovnice n-tého řádu:

$$F\left(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots, y'(x), y(x), x\right) = 0$$

Př.

$$\ln\left(y^{(5)}\right) - \sin(y') + yx^{27} = 0$$

Rovnice rozřešená vzhledem k n-té derivaci

$$y^{(n)}(x) = f\left(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \ldots, y'(x), y(x), x\right)$$

Obecné řešení rovnice n-tého řádu v sobě obsahuje n konstant.

4.2 Diferenciální rovnice 1. řádu se separovatelnými proměnnými a příbuzné rovnice

Obecný tvar:

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \cdot g(y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad g(y) \stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

Věta
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $g(y) \neq 0$ pro $\forall y \in \langle c, d\rangle$.
Potom každým vnitřním bodem (x_0, y_0) obdélníku $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ prochází právě jedno řešení rovnice

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

a je dáno takto:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s$$

Partikulární řešení ... řešení vyhovující zadané počátekční podmínce $\big(y(x_0) = y_0\big)$.

Homogenní rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Řeší se zavedením substituce $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$\begin{aligned} y(x) &= x \cdot u(x) \\ y'(x) &= u(x) + x \cdot u'(x) \end{aligned}$$

dosadíme:

$$u(x) + x \cdot u'(x) = f(u)$$

Toto je separovatená rovnice pro neznámou $u(x) \to$ vyřešíme a zpětně dosadíme do $y(x) = x \cdot u(x)$

4.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Rovnice tvaru:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

$y(x)$ ... hledané řešení
$a(x), b(x)$ ... funkce
$b(x) = \begin{cases} = 0 & \text{homogenní rovnice (HR)} \\ \neq 0 & \text{nehomogenní rovnice (NR)} \end{cases}$

Platí
Pokud jsou $y_1(x)$ a $y_2(x)$ řešení (NR), potom $y_1(x) - y_2(x)$ je řešením (HR).
Důkaz je zřejmý

Důležitý důsledek
Všechna řešení (NR) jsou v tomto tvaru:

$$y_n(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$... obecné řešení (HR) (s konstantou C)
$y_p(x)$... jedno libovolné řešení (NR)

Postup

1. Řešíme homogenní rovnici (metodou separace proměnných) a získáme řešení

$$y_h(x) = C \cdot f(x), \quad C \in \mathbb{R} \text{ konst.}$$

2. Hledáme řešení $y_p(x)$, například metodou variace konstant

$$\begin{aligned} \text{položíme} \quad y_p(x) &= A(x) \cdot f(x), \quad A(x) \ldots \text{neznámá funkce} \\ y_p'(x) &= A'(x) \cdot f(x) + A(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

   a dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} A'(x) \cdot f(x) + A(x) \cdot f'(x) + a(x) \cdot A(x) \cdot f(x) &= b(x) \\ A'(x) \cdot f(x) + A(x) \cdot \underbrace{[f'(x) + a(x) \cdot f(x)]}_{=0 \text{ řešení (HR)}} &= b(x) \\ A'(x) \cdot f(x) &= b(x) \end{aligned}$$

   Vypočítáme $A'(x)$
   Zintegrujeem a dostaneme $A(x)$
   Máme tak partikulární řešení $y_p(x) = A(x) \cdot f(x)$

3. Závěr

$$y_n(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot f(x) + A(x) \cdot f(x)$$

Další speciální a snadno řešitelné typy DR 1. řádu:

- Lagrangeova, Clairautova a Bernoulliova rovnice - v Bartsch, Rectorys
- exaktní rovnice (konzervativní silové pole)

5 Diferenciální rovnice 2. řádu - lineární rovnice s konstatními koeficienty

Fyzikální aplikace:

$$\begin{aligned}\vec{F}(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= m\ddot{\vec{r}}\\ F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= m\ddot{x}\\ F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= m\ddot{y}\\ F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= m\ddot{z}\end{aligned}$$

chci trajektorii $x(t), y(t), z(t)$

Kyvadlo:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$$

malé úhly $\sin\alpha = \alpha$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Lineární rovnice s konstatními koeficienty

$$y''(x) + a\cdot y'(x) + b\cdot y(x) = f(x)$$

$y(x)\ldots$ hledaná funkce
$a, b, \ldots$ konstanty
$f(x)\ldots$ funkce
$f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{homogenní rovnice (HR)} \\ \neq 0 & \text{nehomogenní rovnice (NR)} \end{cases}$

Zkrácený zápis:

$$y'' + ay' + by = f$$

Věta /Cauchyova počáteční úloha/
Nechť $A, B \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I.
Potom existuje právě jedno řešení diferenciální rovnice

$$y'' + ay' + by = f$$

splňující podmínky

$$y(x_0) = A, \quad y'(x_0) = B, \qquad x_0 \in I$$

5.1 Homogenní rovnice

$$y'' + ay' + by = 0$$

Platí:
Funkce $e^{\lambda x}$ je řešením (HR) $\Leftrightarrow$ λ je řešením charakteristické rovnice (CHR)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Důkaz:
$e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}$ je řešením
$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x},\ (e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
Dosadíme

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \ \Leftrightarrow\ (\lambda^2 + a\lambda + b)\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \text{ (CHR)}$$

Diskuze vzhledem k typu řešení (CHR) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

1. Dva různé reálné kořeny $\lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$
   $e^{\lambda_1 x}$ řešením (HR), $e^{\lambda_2 x}$ řešením (HR)
   Potom i jejich lineární kombinace je řešením, tj.

   $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

   Je možno takto zapsat všechna řešení? (Otázka 1)

2. Dva komplexně združené kořeny $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$
   $e^{\lambda_1 x}$ řešením (HR), $e^{\lambda_2 x}$ řešením (HR)
   Potom i jejich lineární kombinace je řešením, tj.

   $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

   Je možno takto zapsat všechna řešení? (Otázka 2)

   $$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)_2 x} \\ &= C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}\Big[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta) + C_2\big(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\big)\Big] \\ &= e^{\alpha x}\Big[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\Big] \\ &= e^{\alpha x}\Big[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta\Big] \\ &= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \end{aligned}$$

   $A, B \ldots$ konstanty

3. Dvojnásobný reálný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
   $e^{\lambda_1 x} \ldots$ řešením (HR)

   $$y(x) = Ce^{\lambda x}$$

   kde je druhá konstantna? (Otázka 3)

Definice
Řekneme, že $y_1(x), y_2(x)$ je fundamentální systém řešení (HR) $y'' + ay' + by = 0$ na I, jestliže pro $\forall x \in I$ platí:

$$\text{Wronskián} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Věta
Pokud je $y_1(x)$ a $y_2(x)$ fundamentální systém řešení, potom každé řešení (HR) je ve tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Důkaz
1) Že je $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ řešením zjistíme dosazením
2) Máme-li zadáno $y(x_0) = A, y'(x_0) = B \quad \Rightarrow$ musíme najít konstanty C_1, C_2, aby dané řešení tyto podmínky splňovalo:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = A \\ y'(x_0) &= C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = B \end{aligned}$$

Hledáme C_1, C_2.
Soustava dvou rovnic, matice soustavy:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Determinant = Wronskián, je odlišný od nuly $\Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení.

Odpovědi na otázky

1. (CHR) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (HR) $y'' + ay' + by = 0$ ma dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$
   Fundamentální systém řešení (FSŘ) $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
   $y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\begin{aligned} \text{Wronskián} &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\ &= \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0 \text{ ruzná řešení}} \underbrace{e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x}}_{\neq 0 \text{ exponenciely}} \neq 0 \end{aligned}$$

   Každé řešení takovéto (HR) je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. (CHR) má dva komplexně združené kořeny $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$
   FSŘ: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
   Každé řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

3. (CHR) má dvojnásobný reálný kořen $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
   FSŘ: $y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}$
   Všechna řešení jsou tvaru
$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$
   Ověření
   $y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}$
   $y_1'(x) = \lambda e^{\lambda x},\ y_2'(x) = e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}$
$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+\lambda x)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = (1+\lambda x)e^{\lambda x}e^{\lambda x} - xe^{\lambda x}e^{\lambda x} = e^{\lambda x}e^{\lambda x} \neq 0$$
   Ověřit, zda $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ je řešením
   $y_2'(x) = e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}$
   $y''(x) = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x\lambda^2 e^{\lambda x} = 2\lambda e^{\lambda x} + x\lambda^2 e^{\lambda x}$
$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= 0 \\ 2\lambda e^{\lambda x} + x\lambda^2 e^{\lambda x} + a(e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}) + b(xe^{\lambda x}) &= 0 \\ e^{\lambda x}[2\lambda + x\lambda^2 + a(1 + x\lambda) + bx)] &= 0 \\ e^{\lambda x}[(x\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0 \text{ (CHR)}} + 2\lambda + a] &= 0 \\ e^{\lambda x}(2\lambda + a) &= 0 \end{aligned}$$
   Zbývá dokázat $2\lambda + a = 0$
   Dvojnásobné řešení $\Rightarrow\ D = 0 = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = a^2 - 4b$
   $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow 2\lambda + a = 0$

5.2 Nehomogenní rovnice

Věta
Nechť

$$y'' + ay' + by = f_1(x) \text{ má řešení } y_1(x)$$
$$y'' + ay' + by = f_2(x) \text{ má řešení } y_2(x)$$

Pak

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

je řešením rovnice

$$y'' + ay' + by = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

Důsledek
Všechna řešení (NR) jsou v tomto tvaru:

$$y_n(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$... obecné řešení (HR) (zhomogenizované rovnice)
$y_p(x)$... jedno konkrétní, tzv. partikulární řešení (NR)

Jak najít $y_p(x)$?

1. Metoda variace konstant
   nalezneme FSŘ (HR): $y_1(x), y_2(x)$
   položíme $y_p(x) = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x)$
   Platí: funkce $A_1(x), A_2(x)$ získáme z následující soustavy rovnic + zintegrováním

$$\begin{aligned} A_1'(x)y_1(x) + A_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ A_1'(x)y_1'(x) + A_2'(x)y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

2. Speciální typ pravé strany

   - $f(x) = e^{\alpha x}\underbrace{\left(d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \cdots + d_1 x + d_0\right)}_{\text{polynom stupně } m}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ d_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \ldots, m\}$

     Platí

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}\left(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right) & \alpha \text{ není kořen (CHR)} \\ x e^{\alpha x}\left(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right) & \alpha \text{ je jednoduchý kořen (CHR)} \\ x^2 e^{\alpha x}\left(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right) & \alpha \text{ je dvojnásobný kořen (CHR)} \end{cases}$$

   - $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P_m(x)$ polynom stupně m, $Q_n(x)$ polynom stupně n
     Platí

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + S_s(x)\sin\beta x\right) & \alpha + i\beta \text{ není kořen (CHR)} \\ x e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + S_s(x)\sin\beta x\right) & \alpha + i\beta \text{ je jednoduchý kořen (CHR)} \end{cases}$$

     $R_s(x), S_s(x)$ polynomy stupně s, $s = max\{m, n\}$

5.3 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y = f(x)$$

$a_i \in \mathbb{R}$ konst., $i \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{homogenní rovnice (HR)} \\ \neq 0 & \text{nehomogenní rovnice (NR)} \end{cases}$$

$$y_n(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$... obecné řešení (HR) (zhomogenizované rovnice), obsahuje n konstant
$y_p(x)$... libovolné jedno, partikulární řešení (NR)

1. Homogenní rovnice
   (CHR)
   $$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$
   má n kořenů (počítáno včetně násobnosti)
   FSŘ
   $$\begin{array}{lrclrclcrcl} \lambda_1 \ldots k_1\text{-násobný kořen} & y_1(x) & = & e^{\lambda_1 x}, & y_2(x) & = & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & y_{k_1}(x) & = & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_2 \ldots k_2\text{-násobný kořen} & y_{k_1+1}(x) & = & e^{\lambda_2 x}, & y_{k_1+2}(x) & = & xe^{\lambda_2 x}, & \ldots, & y_{k_1+k_2}(x) & = & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{array}$$
   obecné řešení:
   $$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

2. Nehomogenní rovnice
   $$y_p(x) = ?$$
   - Metoda variace konstant
     položíme $y_p(x) = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x) + \cdots + A_n(x)y_n(x)$
     řešíme soustavu:
     $$\begin{aligned} A_1'(x)y_1(x) + A_2'(x)y_2(x) + \cdots + A_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ A_1'(x)y_1'(x) + A_2'(x)y_2'(x) + \cdots + A_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ A_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + A_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + A_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ A_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + A_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x) \end{aligned}$$
     a zintegrujeme
   - Speciální typ pravé strany

6 Vynecháno

7 Krivočaré souřadnice

7.1 Základní pojmy - křivka a plocha

Křivka

Zobrazení $\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ (a,b) \\ \langle a,b\rangle \\ A \subseteq \mathbb{R} \end{array} \ni t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ Parametrické vyjádření křivky

$\vec{r}(t)$ polohový vektor
$x(t), y(t), z(t)$ reálné funkce
předpoklady: spojité, mají spojité derivace

Plocha

Zobrazení $\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ (a,b)\times(c,d) \\ \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \\ A \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array} \ni (t,s) \to \chi(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \in \mathbb{R}^3$ Parametrické vyjádření plochy

7.2 Soustavy souřadnic v rovině

7.2.1 Kartézská

Souřadnice $[x, y]$
Souřadnicové křivky
$t_1 \to (t_1, y) \quad y =$ konst
$t_2 \to (x, t_2) \quad x =$ konst
Tečné vektory k souřadnicovým křivkám
křivka $k \to (x(t), y(t))$
tečný vektor $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$

$$\vec{e}_x = \left(\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t_1}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t_1}\right) = (1, 0)$$

$$\vec{e}_y = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t_2}, \frac{\mathrm{d}t_2}{\mathrm{d}t_2}\right) = (0, 1)$$

7.2.2 Polární

Vhodné pro kružnice, kruhy či jejich části
r vzdálenost bodu od počátku
φ orientovaný úhel jako odchylka průvodiče bodu od kladné části osy x

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

celou rovinu dostaneme pro $r \in \langle 0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$
Souřadnicové křivky

- $\varphi =$ konst

  $$r \to (x(r), y(r)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

  polopřímka se začátkem v počátku, svírající orientovaný úhel φ od kladné části osy x

- $r = \text{konst}$
$$\varphi \to (x(r), y(r)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
kružnice se středem v počátku a poloměrem r

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \\
\vec{e}_\varphi &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)
\end{aligned}$$

Plošný element vymezený křivkami $r, r+\Delta r$ a $\varphi, \varphi+\Delta\varphi$

$$\begin{aligned}
\Delta S &\doteq r\cdot\Delta r\cdot\Delta\varphi \\
\mathrm{d}S &\doteq r\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Početně:
$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi|\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\
\vec{e}_\varphi &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) \\
\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi &= \left(\begin{vmatrix} \sin\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \cos\varphi \\ 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}\right) = (0, 0, r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi) = (0, 0, r) \\
|\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi| &= r
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi|\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\varphi = r\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\varphi$$

7.3 Soustavy souřadnic v prostoru

7.3.1 Kartézská

Souřadnice $[x, y, z]$
Anologicky jako v rovině.

7.3.2 Cylindrické (válcové)

pro objekty s osovou symetrií - válec, kužel, paraboloidy,…
r vzdálenost bodu od osy z
φ orientovaný úhel jako odchylka průvodiče kolmého průmětu bodu do roviny xy od kladné části osy x
z kartézská souřadnice

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}$$

celý prostor dostaneme pro $r \in \langle 0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $z \in \mathbb{R}$
Souřadnicové plochy (funkce dvou proměnných)

- $r = \text{konst}$, (φ, z) se mění (parametry)
$$(\varphi, z) \to (x(\varphi, z), y(\varphi, z), z(\varphi, z)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$
válcová plocha

- $\varphi = $ konst, (r, z) se mění (parametry)

$$(r, z) \to (x(r, z), y(r, z), z(r, z)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

polorovina, jejíž hraniční přímka je osa z

- $z = $ konst, (φ, r) se mění (parametry)

$$(\varphi, r) \to (x(\varphi, r), y(\varphi, r), z(\varphi, r)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

rovina rovnoběžná s rovinou xy

Souřadnicové křivky (funkce jedné proměnné)

- $r = $ konst, $\varphi = $ konst, z se mění (parametr)

$$z \to (x(z), y(z), z(z)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

přímka rovnoběžná s osou z

- $\varphi = $ konst, $z = $ konst, r se mění (parametr)

$$r \to (x(r), y(r), z(r)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

polopřímka kolmá na osu z s počátkem na ose z

- $r = $ konst, $z = $ konst, φ se mění (parametr)

$$\varphi \to (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

kružnice v rovině rovnoběžné s rovinou xy se středem na ose z

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám

$$\begin{aligned}
\vec{e}_z &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (0, 0, 1) \\
\vec{e}_r &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\
\vec{e}_\varphi &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$

Element objemu

$$\mathrm{d}V = |\vec{e}_r \cdot (\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z)| \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z = \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Jakobián} \\ \text{pro válcové souřadnice vyjde } r}} \right| \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z = r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$$

Element plochy

- $r = $ konst, (φ, z) se mění

$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z| \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$$

- $\varphi = $ konst, (r, z) se mění

$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_r \times \vec{e}_z| \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$$

- $z = $ konst, (φ, r) se mění

$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r| \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r$$

7.3.3 Sférické (kulové) souřadnice

pro koule, kulové plochy, kužel
r vzdálenost bodu od počátku
φ orientovaný úhel jako odchylka průvodiče kolmého průmětu bodu do roviny xy od kladné části osy x
ϑ odchylka průvodiče bodu od kladné části osy z

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

celý prostor dostaneme pro $r \in \langle 0,\infty) = \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $\vartheta \in \langle 0,\pi\rangle$
Souřadnicové plochy (funkce dvou proměnných)

- $r =$ konst, (φ,ϑ) se mění (parametry)

  $$(\varphi,\vartheta) \to (x(\varphi,\vartheta), y(\varphi,\vartheta), z(\varphi,\vartheta)) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

  kulová plocha

- $\varphi =$ konst, (r,ϑ) se mění (parametry)

  $$(r,\vartheta) \to (x(r,\vartheta), y(r,\vartheta), z(r,\vartheta)) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

  polorovina, jejíž hraniční přímka je osa z

- $\vartheta =$ konst, (φ, r) se mění (parametry)

  $$(\varphi,r) \to (x(\varphi,r), y(\varphi,r), z(\varphi,r)) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

  kuželová plocha

Souřadnicové křivky (funkce jedné proměnné)

- $r =$ konst, $\varphi =$ konst, ϑ se mění (parametr)

  $$\vartheta \to (x(\vartheta), y(\vartheta), z(\vartheta)) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

  poledník

- $r =$ konst, $\vartheta =$ konst, φ se mění (parametr)

  $$\varphi \to (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

  rovnoběžka

- $\varphi =$ konst, $\vartheta =$ konst, r se mění (parametr)

  $$r \to (x(r), y(r), z(r)) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

  polopřímka jejíž počátečním bodem je počátek

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám

$$\begin{aligned} \vec{e}_\vartheta &= \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial y}{\partial\vartheta}, \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right) = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, -r\sin\vartheta) \\ \vec{e}_\varphi &= \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) = (-r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi\sin\vartheta, 0) \\ \vec{e}_r &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta) \end{aligned}$$

Element objemu

$$\mathrm{d}V = |\vec{e}_r \cdot (\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z)| \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\vartheta = \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Jakobián} \\ \text{pro válcové souřadnice vyjde } r^2 \sin \vartheta}} \right| \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z = r^2 \sin\vartheta \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\vartheta$$

Element plochy

- $r =$ konst, (φ, ϑ) se mění
$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\vartheta| \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}\vartheta$$
- $\varphi =$ konst, (r, ϑ) se mění
$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta| \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\vartheta$$
- $\vartheta =$ konst, (φ, r) se mění
$$\mathrm{d}S = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r| \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r$$

8 Křivkový integrál 1. a 2. druhu

8.1 Úvod

Proč?
délka křivky, hmotnost křivky (s proměnou hustotou) - 1. druh
práce síly po křivce - 2. druh

Co potřebujeme?
Definice křivky
zobrazení:

$$t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$x(t), y(t), z(t)$ jsou funkce splňující předpoklady:

- spojité a mají derivace
- spojité derivace $x'(t), y'(t), z'(t)$
- s výjimkou konečného počtu bodů je zobrazení $t \to (x(t), y(t), z(t))$ prosté

8.2 Křivkový integrál 1. druhu

Pozn
objem - objemová hustota

$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

plocha - plošná hustota

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S}$$

křivka - lineární hustota

$$\mu(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l}$$

Úkol
křivka $C : \langle a, b\rangle \ni t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
křivka má lineární hustotu $\mu(\vec{r}) = \mu(x(t), y(t), z(t))$, která je spojitá
Jaká je hmotnost křivky? Dělení $\langle a, b\rangle :\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$
Jakou hmotnost má element $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$?

$$\Delta m_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle} = \mu(\vec{r}(\xi))\Delta l_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle} \qquad \xi \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle$$

„Pythagorova věta“ (Velikost úsečky v R^3)

$$\Delta l_{\langle t_i, t_{i+1}\rangle} = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}$$

Analýza: Lagrangeova věta o střední hodnotě
Nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má derivaci.

$$\exists \eta \in \langle a, b\rangle \text{ tak, ze } f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\begin{aligned}
\exists \eta_x \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle : &\qquad x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\eta_x)(t_{i+1} - t_i) \\
\exists \eta_y \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle : &\qquad y(t_{i+1}) - x(t_i) = y'(\eta_y)(t_{i+1} - t_i) \\
\exists \eta_z \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle : &\qquad z(t_{i+1}) - x(t_i) = z'(\eta_z)(t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

Dohromady:

$$\Delta l_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = \sqrt{[x'(\eta_x)]^2+[y'(\eta_y)]^2+[z'(\eta_z)]^2}(t_{i+1}-t_i)$$

$$\Delta m_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = \mu(\vec{r}(\xi))\Delta l_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = \mu(\vec{r}(\xi))\sqrt{[x'(\eta_x)]^2+[y'(\eta_y)]^2+[z'(\eta_z)]^2}(t_{i+1}-t_i)$$

$$M = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta m_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = \sum_{i=0}^{n-1}\mu(\vec{r}(\xi))\sqrt{[x'(\eta_x)]^2+[y'(\eta_y)]^2+[z'(\eta_z)]^2}(t_{i+1}-t_i)$$

Zjemňování dělení (norma dělení $\to 0$) : $\sum \to \int$

Definice

Křivkový integrál 1. typu ze spojité funkce $f(x,y,z)$, definované v okolí křivky C, přes křivku $C : \langle a,b\rangle \ni t \to \vec{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$

$$\underbrace{\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}l}_{\text{označení}} = \underbrace{\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t}_{\text{Riemann}}$$

Pozn

Změní se parametrizace křivky - změní se výsledek? NE

$C : \langle a,b\rangle \ni t \to (x(t),y(t),z(t))$

$C : \langle a,b\rangle \ni s \to (x(s),y(s),z(s))$

tatáž množina bodů: $s = f(t)$

Aplikace

1. délka křivky

$$L = \int_C 1\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = 1$$

2. hmotnost křivky

$$m = \int_C \mu\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = \mu(x,y,z)$$

3. poloha těžiště

$$x_T = \frac{1}{m}\int_C x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = x\mu(x,y,z)$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int_C y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = y\mu(x,y,z)$$

$$z_T = \frac{1}{m}\int_C z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = z\mu(x,y,z)$$

4. moment setrvačnosti

$$J_x = \int_C (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = (y^2+z^2)\mu(x,y,z)$$

$$J_y = \int_C (x^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = (x^2+z^2)\mu(x,y,z)$$

$$J_z = \int_C (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}l \qquad f(x,y,z) = (x^2+y^2)\mu(x,y,z)$$

8.3 Křivkový integrál 2. druhu

křivka $C : \langle a, b\rangle \ni t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
silové pole $\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$
F_x, F_y, F_z jsou spojité funkce.
Jaká je práce síly po křivce C?
Definice

$$W = \int\limits_C \vec{F} d\vec{r}$$

Dělení $\langle a, b\rangle :\; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$
$\xi \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle$

$$\Delta W_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} \doteq \vec{F}(\vec{r}(\xi))\Delta\vec{r}_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} =$$

$$F_x(x(\xi), y(\xi), z(\xi))\Delta x_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} + F_y(x(\xi), y(\xi), z(\xi))\Delta y_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} + F_z(x(\xi), y(\xi), z(\xi))\Delta z_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle}$$

Lagrangeova věta o střední hodnotě

$$\begin{aligned} \exists\eta_x \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle : &\qquad \Delta x_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = x'(\eta_x)(t_{i+1} - t_i) \\ \exists\eta_y \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle : &\qquad \Delta y_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = y'(\eta_y)(t_{i+1} - t_i) \\ \exists\eta_z \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle : &\qquad \Delta z_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = z'(\eta_z)(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

$$\Delta W_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} = \big[F_x(x(\xi), y(\xi), z(\xi))x'(\eta_x)+$$

$$F_y(x(\xi), y(\xi), z(\xi))y'(\eta_y) + F_z(x(\xi), y(\xi), z(\xi))z'(\eta_z)\big](t_{i+1} - t_i)$$

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_{\langle t_i,t_{i+1}\rangle} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \big[F_x(x(\xi), y(\xi), z(\xi))x'(\eta_x) + F_y(x(\xi), y(\xi), z(\xi))y'(\eta_y) + F_z(x(\xi), y(\xi), z(\xi))z'(\eta_z)\big](t_{i+1} - t_i)$$

Zjemňování dělení (norma dělení $\to 0$) : $\sum \to \int$
Definice
Mějme křivku $C : \langle a, b\rangle \ni t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a vektorové pole $\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$, definované v okolí křivky C, F_x, F_y, F_z spojité funkce.
Křivkový integrál 2. druhu z vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$ po křivce C je

$$\underbrace{\int\limits_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}}_{\text{označení}} = \underbrace{\int\limits_a^b [F_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t}_{\text{Riemann}}$$

Pozn

Jiná parametrizace množiny bodů $\begin{cases} \text{stejný výsledek} & \text{souhlasná parametrizace} & (a \text{ počátek, } b \text{ konec}) \\ \text{opačný výsledek} & \text{nesouhlasná parametrizace} & (a \text{ konec, } b \text{ počátek}) \end{cases}$

9 Funkce více proměnných, derivace, směrová derivace, gradient

Dříve
Funkce 1 promenné: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Vektorové funkce
1 proměnné…křivka $t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$
2 proměnných…plocha $(t,s) \to \chi(t) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \in \mathbb{R}^3$

Nové
Skalární funkce více n proměnných: $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$
pro $n = 2$: $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to f(x,y) \in \mathbb{R}$
pro $n = 3$: $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to f(x,y,z) \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2 \supset M \ni (x,y) \to f(x,y) = z \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^3 \supset M \ni (x,y,z) \to f(x,y,z) \in \mathbb{R}$
$(x,y,z) \to z + 2y - z + 4 =$ konst… rovina

9.1 Parciální derivace

Dříve
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

Parciální derivace
$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to f(x,y,z) \in \mathbb{R}$

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}$$

Parciální derivace vyšších řádů

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy}$$

Je $f''_{xy} \stackrel{?}{=} f''_{yx}$, tedy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Pokud jsou v daném bodě spojité, pak ano.

Derivace v daném směru
$X_0 = [x_0, y_0]$ bod
$\vec{s} = (s_1, s_2)$ vektor (směr)
$f(x,y)$ funkce definovaná na $M \subseteq \mathbb{R}^2$
Parametr $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \forall t : \begin{array}{lcl} x &=& x_0 + s_1 t \\ y &=& y_0 + s_2 t \end{array} \in M$
Směrová derivace funkce $f(x,y)$ v bode $[x_0, y_0]$ ve směru $\vec{s} = (s_1, s_2)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+s_1t, y_0+s_2t) - f(x_0,y_0)}{t}$$

Definice pro funkci 3 proměnných

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+s_1t, y_0+s_2t, z_0+s_3t) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

úsečka

$$f(x,y,z) = f(x_0+s_1t, y_0+s_2t, z_0+s_3t) = f(x(t),y(t),z(t)) = F(t), \quad t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} &= \left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot s_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot s_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot s_3
\end{aligned}$$

9.2 Gradient funkce

Gradient ... operátor

vstupující objekt		operátor		vystupující objekt
funkce 3 proměnných	$\to$	gradient	$\to$	vektor(ové pole)

$$\text{grad}\ f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \text{grad}\ f \cdot \vec{s}$$

$f(x,y,z)$ =konst, $\vec{s}$ tečný vektor k ploše $f(x,y,z)$ =konst $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = 0$
$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \text{grad}\ f \cdot \vec{s} \Rightarrow$ grad f... kolmý vektor k ploše $f(x,y,z)$ =konst

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot s_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot s_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot s_3 = 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+s_1t, y_0, z_0)}^{\text{konst (v limitě)}} - \overbrace{f(x_0,y_0,z_0)}^{\text{konst}}}{t} = 0$$

10 Diferenciál funkce jedné a více reálných proměnných, konzervativnost pole, kmenová funkce

10.1 Diferenciál funkce jedné proměnné

funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \dots$ v každém bodě existují derivace

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \chi_a(h) = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot h + \chi_a(h) = f'(a) \cdot h + \chi_a(h)$$

$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a) \cdot h \dots$ diferenciál funkce f v bodě a
$\chi_a(h) \dots$ funkce proměnné h, chyba, které se dopustíme, když přírůstek funkce $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$ nahradíme přírůstkem na tečně $\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a) \cdot h$.

Počítejme

$$\frac{\chi_a(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\chi_a(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$$

$\chi_a(h)$ utíká k nule rychleji než h $\Rightarrow$ pro $h \to 0$ ho můžeme zanedbat

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &\doteq f'(a) \cdot h \\ f(x+h) - f(a) &\doteq f'(x) \cdot h \\ h \to \mathrm{d}x : \quad \mathrm{d}f(x) &= f'(x) \cdot \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Fyzika:

$$\sin x \doteq x \quad \text{pro } x \to 0$$

10.2 Diferenciál funkce více proměnných

Definice
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je v bodě $a = (a_1, \dots, a_m)$ diferencovatelná, jestliže existuje lineární zobrazení $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ takové, že platí:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{h} = 0$$

λ lineární zobrazení:

$$\begin{aligned} \lambda(h_1 + h_2) &= \lambda(h_1) + \lambda(h_2) \\ \lambda(\alpha \cdot h) &= \alpha \cdot \lambda(h), \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$
$h \to 0 \;\Leftrightarrow\; h_1 \to 0 \wedge \dots \wedge h_m \to 0$
$|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2}$
$f(a+h) = f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) \in \mathbb{R}$
$f(a) = f(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}$
$\lambda(h) \in \mathbb{R}$, z linearity plyne:

$$\lambda(h) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot h_i$$

Tušíme, že

$$\lambda_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a$$

Důkaz
definice:

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ \vdots \\ h_m \to 0}} \frac{|f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m) - (\lambda_1 \cdot h_1 + \dots + \lambda_m \cdot h_m)|}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2}} = 0$$

Konkrétní specifická situace: $h_1 = t, h_2 = 0, \dots, h_m = 0$

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a_1 + t, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) - \lambda_1 \cdot t}{t} \right| = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a_1 + t, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)}{t} - \lambda_1 \right| = 0$$

$$\lambda_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a$$

Analogicky

$$\lambda_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a, \dots, \lambda_m = \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_a$$

Diferencovatelnost funkcí

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$	existuje její derivace $f'(a)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}^m$	$\Rightarrow$	existují její parciální derivace $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_a, \dots, \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right\|_a$
	$\Leftarrow$	existují a jsou v bodě a spojité

$$f(a+h) \doteq f(a) + \lambda(h) = f(a) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a \cdot h_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a \cdot h_2 + \dots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_a \cdot h_m$$

Položme $h_1 = \mathrm{d}x_1, h_2 = \mathrm{d}x_2, \dots, h_m = \mathrm{d}x_m$

$$\mathrm{d}f(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a \cdot \mathrm{d}x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a \cdot \mathrm{d}x_2 + \dots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_a \cdot \mathrm{d}x_m \text{ \dots diferenciál funkce}$$

10.3 Kmenová funkce výrazu pro elementární práci

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$... slušná funkce, $f(x,y,z) \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z$$

Křivkový integrál 2. druhu

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \underbrace{F_x(x,y,z) \cdot \mathrm{d}x + F_y(x,y,z) \cdot \mathrm{d}y + F_z(x,y,z) \cdot \mathrm{d}z}_{\text{diferenciální forma}} = \delta W$$

δW... elementární práce závisí na volbě křivky

Za jakých podmínek je výraz pro elementární práci diferenciálem nějaké funkce f, čili za jakých podmínek spoučasně platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= F_x(x,y,z) \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= F_y(x,y,z) \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= F_z(x,y,z)
\end{aligned}$$

f... pokud existuje ... kmenová funkce

Platí

Kmenová funkce existuje, právě tehdy, když spoučasně platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \\
\frac{\partial F_x}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial x} \\
\frac{\partial F_z}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial z}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ rot $\vec{F} = \vec{0}$... konzervativní silové pole, $f(x,y,z) = -U(x,y,z)$... potenciální energie

Předpokládejme, že kmenová funkce existuje:

$$\begin{aligned}
\int_A^B \mathrm{d}W &= \int_A^B \Big[F_x(x,y,z) \cdot \mathrm{d}x + F_y(x,y,z) \cdot \mathrm{d}y + F_z(x,y,z) \cdot \mathrm{d}z\Big] \\
&\overset{\text{křivk. int. 2. typu}}{=} \int_{t_A}^{t_B} \left[F_x(x(t),y(t),z(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_y(x(t),y(t),z(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_z(x(t),y(t),z(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right] \cdot \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}f(x(t),y(t),z(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}f(x(t),y(t),z(t)) \\
&\overset{\text{Newton-Leibnitz}}{=} \Big[f(x(t),y(t),z(t))\Big]_{t_A}^{t_B} \\
&= f(x(t_B),y(t_B),z(t_B)) - f(x(t_A),y(t_A),z(t_A)) \\
&= f(x_B,y_B,zt_B) - f(x_A,y_A,z_A) \\
&= -(U_B - U_A)
\end{aligned}$$

Nalezení kmenové funkce (pokud existuje) - jedna z možností

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= F_x(x,y,z) \\
\int\limits_{x_0}^{x} \partial f(t,y,z) &= \int\limits_{x_0}^{x} F_x(t,y,z)\,\mathrm{d}t \\
f(x,y,z) - f(x_0,y,z) &= \int\limits_{x_0}^{x} F_x(t,y,z)\,\mathrm{d}t \\
f(x,y,z) &= \int\limits_{x_0}^{x} F_x(t,y,z)\,\mathrm{d}t + \underbrace{f(x_0,y,z)}_{?}
\end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = F_y(x,y,z) \text{ pro } \forall(x,y,z)\text{, tedy i pro } (x_0,y,z)\text{, , tj.:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0,y,z)}{\partial y} &= F_y(x_0,y,z) \\
\int\limits_{y_0}^{y} \partial f(x_0,t,z) &= \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t \\
f(x_0,y,z) - f(x_0,y_0,z) &= \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t \\
f(x_0,y,z) &= \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t + \underbrace{f(x_0,y_0,z)}_{?}
\end{aligned}$$

3.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = F_z(x,y,z) \text{ pro } \forall(x,y,z)\text{, tedy i pro } (x_0,y_0,z)\text{, , tj.:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0,y_0,z)}{\partial y} &= F_y(x_0,y_0,z) \\
\int\limits_{z_0}^{z} \partial f(x_0,y_0,t) &= \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x_0,y_0,t)\,\mathrm{d}t \\
f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0) &= \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x_0,y_0,t)\,\mathrm{d}t \\
f(x_0,y_0,z) &= \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x_0,y_0,t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{f(x_0,y_0,z_0)}_{\text{obyčejná integrační konstanta z } \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Závěr:

$$f(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(t,y,z)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x_0,y_0,t)\,\mathrm{d}t + f(x_0,y_0,z_0)$$

11 Dvojný a trojný integrál, aplikace

Dvojný integrál

$$\iint\limits_M f(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

Trojný integrál

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

Kde to potkáme?

obsah rovinné plochy M

$$S=\iint\limits_M 1\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

objem prostorového tělesa T

$$V=\iiint\limits_T 1\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

hmotnost rovinné plochy M

$$m=\iint\limits_M \sigma(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

hmotnost prostorového tělesa T

$$m=\iiint\limits_T \varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

střed hmotnosti rovinné plochy M

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_M x\sigma(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$
$$y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_M y\sigma(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

střed hmotnosti prostorového tělesa T

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_T x\varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$
$$y_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_T y\varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$
$$z_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_T z\varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

moment setrvačnosti plochy vzhledem k ose

$$J_x=\iint\limits_M y^2\sigma(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$
$$J_y=\iint\limits_M x^2\sigma(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose

$$J_x=\iiint\limits_T (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$
$$J_y=\iiint\limits_T (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$
$$J_z=\iiint\limits_T (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

Metody výpočtu

Věta

$f: M\to\mathbb{R}, M\subseteq\mathbb{R}^2, M=\{(x,y)|a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x)\}$, $f, g(x), h(x)$ „slušné“ spojité funkce.

Platí:

$$\iint\limits_M f(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\;\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Pro trojný integrál podobně.

Věta /O transformaci proměnných v integrálu/
$f : T \to \mathbb{R}, T \subseteq \mathbb{R}^3, f(x,y,z) \in \mathbb{R}$ spojitá.
Zobrazení $\alpha : (u,v,w) \to (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ je vzájemně jednoznačné a parciální derivace α i α^{-1} jsou spojité.
Platí:

$$\iiint\limits_{\alpha(T)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint\limits_{T} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |\det D_\alpha|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w$$

$$\text{Jakobián } \det D_\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Funkce dvou proměnných:

$$\iint\limits_{\alpha(M)} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint\limits_{M} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det D_\alpha|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

$$\text{Jakobián } \det D_\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Polární souřadnice

$$\begin{aligned} u &= r \\ v &= \varphi \\ x(r,\varphi) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &= r\sin\varphi \\ |\det D_\alpha| &= r \end{aligned}$$

12 Pravděpodobnost, statistika, zpracování měření

Empiricky

$$p = \frac{m}{n}, \quad n \to \infty$$

m… počet nastoupení jevu
n… počet všech opakování pokusu

$$p = \frac{M}{N}$$

M… počet případů, kdy jev nastane
N… počet všech možných případů

$p \in \langle 0; 1 \rangle$
$p = 0$… jev nemožný
$p = 1$… jev jistý

„poctivá kostka“
Jaká je pravděpodobnost, že padne trojka?

$$M = 1, \quad N = 6, \qquad p = \frac{1}{6}$$

Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo?

$$M = 3, \quad N = 6, \qquad p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sportka
Jaká je pravděpodobnost hlavní výhry?

$$M = 1, \quad N = \binom{49}{6}, \qquad p = \frac{1}{\binom{49}{6}} \doteq 7 \cdot 10^{-8}$$

Jaká je pravděpodobnost páté ceny (3 ze 6)?

$$M = \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{trefíme}} \cdot \underbrace{\binom{43}{3}}_{\text{netrefíme}}, \quad N = \binom{49}{6}, \qquad p = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \doteq 0,018$$

Nezávislé jevy
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne u obou šestka?

$$M = 1, \quad N = 6 \cdot 6 = 36, \qquad p = \frac{1}{36} = \underbrace{\frac{1}{6}}_{p(A)} \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{p(B)}$$

A… na kostce A padne šestka
B… na kostce B padne šestka

$$p = p(A) \cdot p(B)$$

Neslučitelné jevy
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu jednou kostkou padne pětka nebo šestka?

$$M = 2, \quad N = 6, \qquad p = \frac{2}{6} = \underbrace{\frac{1}{6}}_{p(A)} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{p(B)}$$

$A \ldots$ padne pětka
$B \ldots$ padne šestka

$$p = p(A) + p(B)$$

Vylučující se jevy

$$1 = p(A) + p(B)$$

Bernoulliho pokus
Celkem n-krát opakujeme tentýž pokus (házení kostkou, házení mincí).
Pravděpodobnost, že při daném (jednom, každém) pokusu nastane nějaký jev (šestka, líc) je p ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$).
Jaká je pravděpodobnost, že popsaný jev nastane při těchto n pokusech právě k-krát?

$$P(k, n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Zpracování měření
Dvě skupiny měří délku lavice:

	1. sk / m	2. sk / m
1.	$1,43$	$1,51$
2.	$1,45$	$1,61$
3.	$1,41$	$1,43$
4.	$1,41$	$1,55$
5.	$1,43$	$1,63$
6.	$1,46$	$1,51$
7.	$1,42$	$1,53$
8.	$1,43$	$1,48$
9.	$1,46$	$1,49$
10.	$1,42$	*1,21*

Který údaj je správný? Jaká je délka lavice?
Která skupina měřila lépe?

Průměrná hodnota

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \sum_h x_h p_h, \quad x_h \text{ je hodnota s pravděpodobností } p_H$$

1. skupina $\bar{x}_1 = 1,43$
2. skupina $\bar{x}_1 = 1,53$

Rozptyl měření

$$D(x) = \left\langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$$

1. skupina $D_1(x) = 0,0003$
2. skupina $D_2(x) = 0,0035$

Normální rozdělení

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$w(x)\dots$ hustota pravděpodobnosti
$w(x)\mathrm{d}x\dots$ pravděpodobnost, že veličina x leží v intervalu $(x,\ x+\mathrm{d}x)$

Pravděpodobnost, že veličina x leží v intervalu $\langle a, b \rangle$

$$p = \int\limits_a^b w(x)\ \mathrm{d}x$$

Platí
$x \in (-\infty, \infty), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\ \mathrm{d}x = 1$
$\langle x \rangle = 0$
$D(x) = \sigma^2$
Při měření posunuté:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \langle x \rangle = \mu$$

Postup při zpracování měření:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_n}{n} \quad \text{„okolí hodnoty } \mu\text{“}$$

$$D(x) = \left\langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$$

$$x = \left(\langle x \rangle \pm \sqrt{D(x)} \right) \text{ s relativní chybou } \frac{\sqrt{D(x)}}{\langle x \rangle}$$