Gymnázium, Brno, třída Kapitána Jaroše 14

Závěrečná maturitní práce

Matice

Konzultant: Mgr. Aleš Kobza Ph.D.

Brno 2011

Jakub Juránek

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci zpracoval samostatně a použil jen uvedené prameny a literaturu.

V Brně dne 7. 1. 2011

....
Podpis

Obsah

Úvod

Tato práce vznikla během mého studia na gymnáziu na třídě Kapitána Jaroše. Jelikož jsem byl studentem matematické třídy a matematika byla mým oblíbeným předmětem, je i tato práce dělána v předmětu matematika. Téma této práce mě napadlo úplnou náhodou, ale hned jsem věděl, že je to to pravé. Jsou to totiž právě matice, které jsou nástrojem, jež se ve středoškolském studiu naučíte již na začátku, a provází vás pak celým jeho trváním.

1 Základní definice

Definice
Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Pak obdélníkové schéma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, nazýváme (reálnou) maticí typu $m/n \left\{ \begin{smallmatrix} m \text{ řádků} \\ n \text{ sloupců} \end{smallmatrix} \right.$
Čísla a_{ij} nazýváme prvky této matice.
Uspořádanou n-tici $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ nazýváme i-tým řádkem matice A.
Uspořádanou m-tici $[a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]$ nazýváme j-tým sloupcem matice A.
Je-li $m = n$, hovoříme o čtvercové matici.

Poznámka
Stručný zápis: $A = (a_{ij})_{m,n}$.

Definice
Nulovou maticí rozumíme takovou matici typu m/n, jejíž všechny prvky jsou nulové.
Píšeme 0_{mn}.

Definice
Nechť $A = (a_{ij})_{m,m}$ je čtvercová matice.
Řekneme, že matice A je jednotková, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Píšeme $A = E_m$ (případně jen E).

Definice
Nechť $A = (a_{ij})_{m,n}$ je nenulová matice.
Řekneme, že matice A je ve schodovitém (stupňovitém, trojúhelníkovém) tvaru, jestliže každý její následující řádek začíná větším počtem nul než ten předchozí.

Definice
Hodností matice $h(A)$ rozumíme počet jejích nenulových řádků ve schodovitém tvaru.

2 Operace s maticemi

Pro matice definujeme následující operace takto:

2.1 Rovnost matic

Nechť $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{k,l}$ jsou matice.
Řekneme, že matice A a B se rovnají $A = B$, jestliže $m = k \ \wedge \ n = l \ \wedge \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $a_{ij} = b_{ij}$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \neq B, \text{ protože nejsou stejného typu}$$

2.2 Sčítání matic

Nechť $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{m,n}, C = (c_{ij})_{m,n}$ jsou matice stejného typu.
Součet matic A a B definujeme jako matici C, kde $(c_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$,
pro $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro sčítání matic platí:

- Komutativní zákon: $A + B = B + A$
- Asociativní zákon: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Příklad

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+3 & 3-4 \\ 2-1 & -1-2 & 1+3 \\ -1+4 & 8-5 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\pi}{6} \\ \frac{4}{9} & -\sqrt[4]{\pi} & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ -\frac{43}{\pi} & \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}} & \frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{\pi}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{8}{7} & \sqrt{19} \end{pmatrix}$$

$A + B$ nelze, protože nejsou stejného typu

2.3 Násobení matice reálným číslem (skalárem)

Nechť $A = (a_{ij})_{m,n}$ je matice, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Součin matice A a skaláru α definujeme jako matici $\alpha A \equiv (\alpha \cdot a_{ij})_{m,n} = A\alpha$.

Pro násobení matic skalárem platí:

- Distributivní zákon pro součin součtu skalárů a matice: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- Distributivní zákon pro součin skaláru a součtu matic: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- Asociativní zákon pro součin skalárů a matice: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \alpha\beta A$

Příklad
αA:
1.
$$\alpha = 4,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A = \begin{pmatrix} -4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 8 & 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 20 \\ 32 & 4 \end{pmatrix}$$

2.
$$\alpha = -\frac{3}{2},\ A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & 16 & \pi \\ -1 & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & -4 & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \alpha A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -24 & -\frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ -1 & 6 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Příklad
$\alpha(A + B)$:
1.
$$\alpha = 3,\ A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4} & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{12}}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{14}{6} \end{pmatrix}$$
$$\alpha A = \begin{pmatrix} -6 & \sqrt{3} \\ \frac{3}{4} & 15 \end{pmatrix},\ \alpha B = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & -7 \end{pmatrix},\ \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

2.
$$\alpha = 7,\ A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & 11 \\ 546 & \frac{6}{13} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{33}{21} & -8 \\ 454 & \frac{101}{91} \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1000 & \frac{11}{7} \end{pmatrix},\ \alpha(A + B) = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 7000 & 11 \end{pmatrix}$$

2.4 Násobení matic

Nechť $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$ jsou matice.
Součinem matic A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici $C = (c_{ij})_{m,p}$, (píšeme $C = AB$), pro jejíž prvky platí:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \text{ pro } \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Je vidět, že pro násobení matic komutativní zákon obecně neplatí: $AB \neq BA$.

Násobení jednotkovou maticí E a nulovou maticí 0
Pro čtvercové matice A, E, 0 téhož typu platí:

- $AE = EA = A$
- $A0 = 0A = 0$

Je tedy vidět, že matice E a 0 mají v maticovém počtu týž význam, jako 1 a 0 při násobení na množině $\mathbb{R}$.

Příklad

1.

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A \text{ nelze, protože } 1 \neq 2$$

2.

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{3,3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C_{3,3} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -5 & -10 & 24 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; B \cdot A = D_{3,3} = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ -1 & 17 & 13 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

3 Úpravy matic

Definice
Elementární řádkovou úpravou matice (EŘÚ) rozumíme libovolnou z následujících úprav:

1. Záměna dvou řádků
2. Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem
3. Přičtení násobku libovolného řádku k jinému řádku
4. Vypuštění nulového řádku

Definice
Matice B, která vznikla z matice A pomocí jedné EŘÚ se nazývá ekvivalentní s maticí A, píšeme $A \sim B$.

Je tedy zřejmé, že:

1. $A \sim B \;\Leftrightarrow\; B \sim A$
2. $A \sim B \;\Rightarrow\; h(A) = h(B)$
   Ovšem $h(A) = h(B) \not\Rightarrow A \sim B$
3. $A \sim B \;\Rightarrow\;$ mají stejný počet sloupců

Úprava matice na schodovitý tvar
Nejjednodušší řádek (zpravidla nezačíná nulou) vybereme na 1. místo a jeho vhodné násobky přičítáme k nenulovým násobkům dalších řádků tak, aby po této úpravě nově vzniklé řádky začínaly nulou.
1. řádek opíšeme.
Nejjednodušší řádek začínající nulou vybereme na 2. místo a jeho vhodné násobky přičítáme k nenulovým násobkům dalších řádků tak, aby po této úpravě nově vzniklé řádky začínaly dvěma nulami.
Takto pokračujeme, až se dostaneme do schodovitého tvaru.

Příklad
Upravte matici do schodovitého tvaru a určete její hodnost:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (3) \\ (1) - 2\cdot(3) \\ (2) + 3\cdot(3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) + 10\cdot(2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (2) \\ 2\cdot(1) - 7\cdot(2) \\ 2\cdot(3) - 5\cdot(2) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -19 \\ 0 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ 19\cdot(3) - 17\cdot(2) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(B) = 2$$

4 Gaussova eliminační metoda

Označme (1) systém m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Matice soustavy $(1) \ldots A = (a_{ij})_{m,n}$.

Rozšířená matice soustavy $(1) \ldots \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$

Věta
Uvažme systém lineárních rovnic (1).
Pak následující úpravy jsou zřejmě ekvivalentními úpravami systému (1).

1. Záměna dvou rovnic
2. Vynásobení libovolné rovnice nenulovým reálným číslem
3. Přičtení násobku libovolné rovnice k jiné rovnici

Poznámka
Je vidět, že uvedené úpravy odpovídají EŘÚ rozšířené matice systému (1).

Gaussova eliminace je metoda, při níž EŘÚ převádíme matici $\bar{A}$ na schodovitý tvar, z něhož dopočítáme možné hodnoty jednotlivých neznámých.

Věta ***/Frobeniova, Kronecker-Capelliho věta/***
Systém (1) s maticí A a s rozšířenou maticí $\bar{A}$ je řešitelný $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(\bar{A})$.
Důkaz
"$\Rightarrow$" sporem
$h(A) \neq h(\bar{A}) \;\Rightarrow\; h(\bar{A}) > h(A) \;\Rightarrow\;$ poslední řádek je tvaru $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{array}\right), a \neq 0 \;\Rightarrow$
$0 \neq a \;\wedge\; a \neq 0$ spor
"$\Leftarrow$"
$h(A) = h(\bar{A}) \;\Rightarrow\;$ v matici ve schodovitém tvaru není řádek $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{array}\right), a \neq 0 \;\Rightarrow$
systém je řešitelný
c.b.d.

Věta
Jestliže je systém (1) řešitelný, pak platí:

1. Systém (1) má právě jedno řešení $\Leftrightarrow$ $n = h(A) = h(\bar{A})$
2. Systém (1) má nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow$ $n > \left[h(A) = h(\bar{A})\right]$, přičemž volných neznámých (tj. parametrů) je právě $n - h(A)$

Důkaz
Vyplívá z Gaussovy eliminační metody a Frobeniovy věty.

Příklad

Vyřešte systém:

1.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 15 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 17 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 2 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 15 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 17 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} -(3) \\ (1)+2\cdot(3) \\ (2)+(3) \\ (4)+3\cdot(3) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & 21 \\ 0 & 6 & 0 & 35 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3)-5\cdot(2) \\ (4)-6\cdot(2) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -17 & -29 \\ 0 & 0 & -18 & -25 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ 17\cdot(4)-18\cdot(3) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -17 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 97 \end{array}\right) \Rightarrow\ 0 = 97 \text{ spor } \Rightarrow\ K = \emptyset$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 7 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 8 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & -5 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & - & 3x_5 & = & -18 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 5 & -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (3) \\ (1)+(3) \\ (2)+3\cdot(3) \\ (4)+2\cdot(3) \\ (5) \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|l} -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 15 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -5 & -28 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} (1) \\ (4) \\ (2)-5\cdot(4) \\ (3)+3\cdot(4) \\ (5)-2\cdot(4) \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|l} -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & -10 & -35 & 26 & 142 \\ 0 & 0 & 7 & 39 & -17 & -91 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 10 & 62 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (5) \\ (3)-5\cdot(5) \\ 2\cdot(4)+7\cdot(5) \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|l} -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 10 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & -24 & -168 \\ 0 & 0 & 0 & -41 & 36 & 252 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \frac{1}{2}\cdot(4) \\ 25\cdot(5)+\frac{41}{2}\cdot(4) \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|l} -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & -2 & -17 & 10 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -12 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 408 & 2856 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} (5): 408x_5 = 2856 \ \Rightarrow\ x_5 = 7 \\ (4): 25x_4 - 84 = -84 \ \Rightarrow\ x_4 = 0 \\ (3): -2x_3 + 70 = 62 \ \Rightarrow\ x_3 = 4 \\ (2): x_2 + 8 - 35 = -28 \ \Rightarrow\ x_2 = -1 \\ (1): -x_1 + 4 - 7 = -5 \ \Rightarrow\ x_1 = 2 \end{array}$$

$$K = \{[2; -1; 4; 0; 7]\}$$

Označme (2) systém:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Systém (2), který je speciálním případem (1) nazýváme homogenním systémem.
$h(A) = h(\bar{A})$... za svislou čarou je vždy 0
$\Rightarrow$ systém (2) je vždy řešitelný
Vždy $[0; 0; \ldots ; 0] \in K$, tzv. triviální řešení.
Máme-li řešit homogenní systém lineárních rovnic, vlastně řešíme otázku, zda existují i další řešení systému kromě řešení triviálního.
Existuje-li nějaké netriviální řešení systému (2), pak má systém (2) nekonečně mnoho řešení.

Příklad
Vyřešte systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{homogenní systém } \Rightarrow [0; 0; 0; 0] \in K$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{r} (2) \\ (1) - 3 \cdot (2) \\ (3) \\ (4) + 2 \cdot (2) \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x_3 = 0$$

parametrizujeme $x_2 = t$ a dosadíme:

$$\begin{array}{l} (3): \ 3t + x_4 = 0 \ \Rightarrow \ x_4 = -3t \\ (2): \ 9t + 3 \cdot (-3t) = 0 \checkmark \\ (1): \ x_1 - t - (-3t) = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -2t \end{array}$$

$$K = \{[-2t; \ t; \ 0; \ -3t] \, ; t \in \mathbb{R}\}$$

5 Determinanty

V dalším budeme definovat determinant pouze pro matice do třetího řádu (jen 3 speciální případy).
Obecná definice determinantu pro matici n-tého řádu je velmi komplikovaná a přesahuje středoškolské učivo, tudíž zde není uvedena.
Uvedené věty platí obecně pro jakýkoliv determinant, ačkoliv zde není důkaz uveden, jelikož k němu potřebujeme právě obecnou definici.

Definice
Nechť A je čtvercová matice.
Determinantem matice A nazýváme reálné číslo $|A|$ (resp. det A). Jestliže:

- $A = (a)$, pak definujeme $|A| = a$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, pak definujeme $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, pak definujeme $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Věta ***/Vlastnosti determinantů/***
Nechť A je čtvercová matice.

- Je-li jeden řádek matice A nulový, pak $|A| = 0$
- Jestliže matice B vznikne z matice A výměnou dvou řádků, pak $|B| = -|A|$
- Jestliže matice C vznikne z matice A vynásobením nenulovým číslem r, pak $|C| = r \cdot |A|$
- Jestliže matice D vznikne z matice A tak, že k jistému jejímu řádku přičteme násobek jiného jejího řádku, pak $|D| = |A|$
- Jestliže má matice A dva shodné řádky, pak $|A| = 0$
- Je-li matice A ve schodovitém tvaru, pak je její determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále

Příklad
$A = (-5), \quad |A| = -5$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad |B| = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot (-3) = -4 - 6 = -10$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |C| = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = -5$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 8 & 7 & 9 & -1 & -3 \\ 15 & 6 & 9 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad 1.\text{řádek} = 4.\text{řádek} \Rightarrow |D| = 0$$

$$E = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \; E \text{ je ve schodovitém tvaru} \Rightarrow |E| = 8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-3) = 720$$

Věta ***/Cramerovo pravidlo/***
Nechť je dán systém n rovnic o n neznámých.
Nechť A je maticí tohoto systému a nechť $|A| \neq 0$.
Pak platí:
Tento systém má právě jedno řešení $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, kde matice A_i vznikla z matice A tak, že její i-tý sloupec byl nahrazen sloupcem absolutních členů.

Příklad
Cramerovým pravidlem řešte soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 23 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 23 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 23 & 3 \end{vmatrix} = -12 \ \Rightarrow \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 23 \end{vmatrix} = -20 \ \Rightarrow \ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$K = \{[1; 3; 5]\}$$

Definice
Vynecháme-li v determinantu A n-tého řádu i-tý řádek a j-tý sloupec, vznikne determinant $(n-1)$-ního řádu, který nazýváme minorem (subdeterminantem) determinantu A příslušným k prvku a_{ij}, značíme jej $|M_{ij}|$.
Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$ nazýváme algebraickým doplňkem k prvku a_{ij} determinantu A.

Věta ***/Laplaceova věta/***
Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak platí:
$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$
$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$

Příklad
Vyřešte systém:
1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \mathbf{0} & 2 \\ 3 & 4 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & 3 & -\mathbf{1} & 3 \\ -1 & -1 & \mathbf{0} & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$-1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 - (-27) - (-36) + 0 = 63$$

2.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 46 + 0 + 0 - 5 \cdot (-46) = 322$$

Příklad

Pomocí Cramerova pravidla vypočtěte x_2 , dosaďte do rovnic a Cramerovým pravidlem vypočtete zbylé neznámé.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10\\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8\\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 15\\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 18\end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \mathbf{1}\\ 4 & 2 & 3 & \mathbf{1}\\ 3 & 5 & 1 & \mathbf{1}\\ 7 & 4 & 5 & \mathbf{2}\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 1\\ 7 & 4 & 5\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ 7 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 3\\ 7 & 4 & 5\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix} = -(-1) - 7 - 1 + 2\cdot 4 = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 & \mathbf{1}\\ 4 & 8 & 3 & \mathbf{1}\\ 3 & 15 & 1 & \mathbf{1}\\ 7 & 18 & 5 & \mathbf{2}\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 & 3\\ 3 & 15 & 1\\ 7 & 18 & 5\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2\\ 3 & 15 & 1\\ 7 & 18 & 5\end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2\\ 4 & 8 & 3\\ 7 & 18 & 5\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2\\ 4 & 8 & 3\\ 3 & 15 & 1\end{vmatrix} = -11 - 11 + 0 + 2\cdot 11 = 0$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{1} = 0$$

Dosadíme x_2:

$$\begin{array}{rcrcrcr}3x_1 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10\\ 4x_1 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8\\ 3x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 15\\ 7x_1 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 18\end{array}$$

Řešíme soustavu prvních tří rovnic a poté pro ověření dosadíme do čtvrté.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1\\ 8 & 3 & 1\\ 15 & 1 & 1\end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{|B_1|}{|B|} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$|B_3| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1\\ 4 & 8 & 1\\ 3 & 15 & 1\end{vmatrix} = 5 \Rightarrow x_3 = \frac{|B_3|}{|B|} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 10\\ 4 & 3 & 8\\ 3 & 1 & 15\end{vmatrix} = -11 \Rightarrow x_4 = \frac{|B_4|}{|B|} = \frac{-11}{-1} = 11$$

$$7\cdot 3 + 5\cdot(-5) + 2\cdot 11 = 18\surd$$

$$K = \{[3; 0; -5; 11]\}$$

V dalším si ukážeme různé oblasti středoškolské matematiky, kde se dají matice využít.
Jelikož se daným tématům věnujeme právě pouze s ohledem na užití matic, uvádíme zde jen některé nezbytné definice a uvedené věty nedokazujeme.

6 Rozklad na parciální zlomky

Definice
Funkci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x], Q(x) \neq 0$ nazýváme racionální lomenou funkcí (dále RLF).

Definice
Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je RLF.
Jestliže stupeň $P(x) <$ stupeň $Q(x)$, nazývá se funkce $f(x)$ ryze lomená RLF.
V opačném případě se funkce $f(x)$ nazývá neryze lomená RLF.

Věta
Libovolnou neryze lomenou RLF lze převést na součet polynomické funkce a ryze lomené RLF.

Věta
Nechť $F(x) \in \mathbb{R}[x]$ je polynom alespoň 3. stupně.
Pak existují polynomy $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, z nichž každý je alespoň 1. stupně, tak, že platí:
$F(x) = P(x) \cdot Q(x)$

Poznámka
Uvedené tvrzení nám říká, že každý polynom je možné rozložit na součin polynomů lineárních a kvadratických (se záporným determinantem).

Věta ***/Věta o rozkladu na parciální zlomky/***
Nechť $f(x)$ je ryze lomená RLF.
Pak $f(x)$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \dots + \frac{B_l}{(x-x_2)^l} + \dots + \frac{C_1}{(x-x_p)} + \dots \\ & + \frac{C_m}{(x-x_p)^m} + \frac{D_1x+E_1}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{D_nx+E_n}{(x^2+p_1x+q_1)^n} \\ & + \frac{F_1x+G_1}{(x^2+p_2x+q_2)} + \dots + \frac{F_rx+G_r}{(x^2+p_2x+q_2)^r} + \dots + \frac{H_1x+I_1}{(x^2+p_sx+q_s)} + \dots + \frac{H_tx+I_t}{(x^2+p_sx+q_s)^t}, \end{aligned}$$

kde:
$x_1, x_2, \dots, x_p$ jsou kořeny jmenovatele f, přičemž x_1 je k-násobný, x_2 l-násobný, ..., x_p m-násobný.
Výrazy $x^2 + p_ix + q_i, i \in \{1, 2, \dots, s\}$ mají záporné diskriminanty (nemají reálný kořen), přičemž jejich exponent probíhá všechna přirozená čísla do n (resp. r,..., resp. t), tj. do nejvyšší mocniny patřičného trojčlenu, s níž se objevuje v rozkladu jmenovatele na součin dále nerozložitelných polynomů v $\mathbb{R}[x]$.
Všechny ostatní koeficienty v čitatelích i jmenovatelích zlomků jsou vhodná reálná čísla.

Poznámka
Ve smyslu předchozích vět je možné rozložit na parciální zlomky i neryze lomenou RLF a to tak, že ji převedeme na součet polynomu a ryze lomené RLF, kterou rozložíme podle předchozí věty.

Postup:
Napíšeme si rovnici pro rozklad $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde máme neznámé v čitatelích, a to $A_1, \dots, I_t$.
Vynásobíme obě strany $Q(x)$ – ekvivalentní úprava, neboť z definice $Q(x) \neq 0$.
Pravou stranu roznásobíme a vytkneme jednotlivé mocniny x.
Dále řešíme jako soustavu o (stupeň $Q(x) + 1$) neznámých pro jednotlivé mocniny x.

Příklad

Rozložte na parciální zlomky:

1.

$$\frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$\begin{aligned} 3x+1 &= A\cdot(x-1) + B\cdot(x+1) \\ 3x+1 &= Ax - A + Bx + B \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x:\ 3 = A+B \\ x^0:\ 1 = -A+B \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2B = 4 & \Rightarrow & B = 2 \\ A+2 = 3 & \Rightarrow & A = 1 \end{array}$$

$$\frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

2.

$$\frac{3x-8}{(x+2)\cdot(x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\begin{aligned} 3x-8 &= A\cdot(x^2+3) + Bx\cdot(x+2) + C\cdot(x+2) \\ 3x-8 &= Ax^2 + 3A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x^2:\ 0 = A+B \\ x:\ 3 = 2B+C \\ x^0:\ -8 = 3A+2C \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 7C = -7 & \Rightarrow & C = 1 \\ 2B+1 = 3 & \Rightarrow & B = 2 \\ A+2 = 0 & \Rightarrow & A = -2 \end{array}$$

$$\frac{3x-8}{(x+2)\cdot(x^2+3)} = -\frac{2}{x+2} + \frac{2x-1}{x^2+3}$$

3.

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+2x}{x\cdot(x^2+2)\cdot(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

$$\begin{aligned} x^4+2x^3+4x^2+2x &= A\cdot(x^2+2)\cdot(x^2+4) + Bx^2\cdot(x^2+4) + Cx\cdot(x^2+4) \\ &\quad + Dx^2\cdot(x^2+2) + Ex\cdot(x^2+2) \\ x^4+2x^3+4x^2+2x &= Ax^4 + 6Ax^2 + 8A + Bx^4 + 4Bx^2 + Cx^3 + 4Cx \\ &\quad + Dx^4 + 2Dx^2 + Ex^3 + 2Ex \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x^4:\ 1 = A+B+D \\ x^3:\ 2 = C+E \\ x^2:\ 4 = 6A+4B+2D \\ x:\ 2 = 4C+2E \\ x^0:\ 0 = 8A \Rightarrow A = 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} -E = -3 & \Rightarrow & E = 3 \\ & & D = 0 \\ C+3 = 2 & \Rightarrow & C = -1 \\ B+0 = 1 & \Rightarrow & B = 1 \end{array}$$

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+2x}{x\cdot(x^2+2)\cdot(x^2+4)} = \frac{x-1}{x^2+2} + \frac{3}{x^2+4}$$

7 Vektorové prostory

Definice
Nechť $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ jsou vektory, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$.
Vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ nazýváme lineárně nezávislé, jestliže rovnice $k_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + k_n \cdot \vec{u}_n = 0$ má jediné (triviální) řešení $k_1 = \dots = k_n = 0$.
V opačném případě je nazýváme lineárně závislé.

Věta
Vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$ $\exists i \in \{1, \dots, n\}$: $\vec{u}_i$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, tj. $\vec{u}_i = k_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + k_{i-1} \cdot \vec{u}_{i-1} + k_{i+1} \cdot \vec{u}_{i+1} + \dots + k_n \cdot \vec{u}_n$.

Pro ověření lineární (ne)závislosti zapíšeme složky vektorů do matice (vektor = řádek / sloupec), kterou upravíme do schodovitého tvaru. Dostaneme-li nulový řádek, pak jsou dané vektory lineárně závislé. V opačném případě jsou lineárně nezávislé.

Příklad

1.

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (1, 2, 0) \\ \vec{u}_2 &= (3, -1, 2) \\ \vec{u}_3 &= (4, -2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) - 3 \cdot (1) \\ (3) - 4 \cdot (1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ 7 \cdot (3) - 10 \cdot (2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ lineárně nezávislé}$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (0, 3, -1, 4) \\ \vec{u}_2 &= (1, 5, 6, -1) \\ \vec{u}_3 &= (5, 4, 4, 12) \\ \vec{u}_4 &= (2, 1, 4, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (2) \\ (1) \\ (3) - 5 \cdot (2) \\ (4) - 2 \cdot (2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -21 & -26 & 17 \\ 0 & -9 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) + 7 \cdot (2) \\ (4) + 3 \cdot (2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -33 & 45 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (4) \\ (3) - 3 \cdot (4) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ lineárně závislé}$$

Definice
Řekneme, že vektory $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V, jestliže: $\langle\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}\rangle = V \quad \wedge$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Věta
Nechť $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V.
Nechť $\vec{u} \in V$ je libovolný vektor.
Pak $\exists k_1, \ldots, k_n$: $\vec{u} = k_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + k_n \cdot \vec{e}_n$, přičemž čísla k_i jsou určena jednoznačně pro $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definice
Nechť $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V.
Pak číslo n nazýváme dimenzí vektorového prostoru V, píšeme dim $V = n$.
Dále definujeme dim $V = 0$, pokud $V = \{\vec{0}\}$.

Definice
Označme (1) bázi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ vektorového prostoru V.
Nechť $\vec{u} \in V$ je libovolný vektor.
Uspořádanou n-tici $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ nazveme souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ v bázi (1), píšeme $(x_1, \ldots, x_n)_{(1)}$, jestliže $\vec{u} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n$.

Věta
Nechť $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ tvoří bázi (1) vektorového prostoru V.
Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a mají v bázi (1) souřadnice $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n)_{(1)}, \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)_{(1)}$.
Pak platí: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)_{(1)}$
$k \in \mathbb{R}$: $k \cdot \vec{x} = (k \cdot x_1, \ldots, k \cdot x_n)_{(1)}$

Pro zjištění souřadnic daného vektoru v dané bázi si dané bázové vektory zapíšeme do rozšířené matice (i-tý vektor = i-tý sloupec, daný vektor = sloupec absolutních hodnot). Na řádcích tak máme rovnice pro jednotlivé souřadnice. Pomocí Gaussovy eliminační metody vypočítáme jednotlivé neznámé, což jsou souřadnice daného vektory v dané bázi.
Do sloupce absolutních hodnot můžeme dát i obecný vektor, čímž vyjádříme jednotlivé souřadnice obecně přes složky daného vektoru.
Vidíme, že tyto úpravy odpovídají i zjišťování lineární závislosti vektorů, tudíž touto metodou si zároveň můžeme ověřit, zda jsou dané bázové vektory opravdu lineárně nezávislé a zda tedy tvoří bázi a můžeme pomocí nich určit souřadnice daného vektoru.

Příklad

Určete bázi (1) vektorového prostoru $V = \langle\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}\rangle$ a souřadnice těchto vektorů v nalezené bázi (1).

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (3,2,1,6)\\ \vec{u}_2 &= (2,-3,4,4)\\ \vec{u}_3 &= (-5,6,7,-10)\\ \vec{u}_4 &= (11,-13,11,22)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 4 & 4\\ -5 & 6 & 7 & -10\\ 11 & -13 & 11 & 22\end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (2)\\ 2\cdot(1)-3\cdot(2)\\ 2\cdot(3)+5\cdot(2)\\ 2\cdot(4)-11\cdot(2)\end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4\\ 0 & 13 & -10 & 0\\ 0 & -3 & 34 & 0\\ 0 & 7 & -22 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1)\\ (2)\\ (3)\\ \frac{3\cdot(4)+7\cdot(3)}{172}\end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4\\ 0 & 13 & -10 & 0\\ 0 & -3 & 34 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} (1)-4\cdot(4)\\ \frac{(2)+10\cdot(4)}{13}\\ (3)-34\cdot(4)\\ (4)\end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \frac{(1)+3\cdot(2)}{2}\\ (2)\\ (4)\\ (3)+3\cdot(2)\end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1,0,0,2)\\ \vec{e}_2 = (0,1,0,0)\\ \vec{e}_3 = (0,0,1,0)\end{array}$$

$$\vec{x} = (a,b,c,d) = k_1\cdot\vec{e}_1 + k_2\cdot\vec{e}_2 + k_3\cdot\vec{e}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 2 & 0 & 0 & d\end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4)-4\cdot(1)\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0 & d-2a\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} d = 2a \ldots \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \text{ splňují}\\ k_1 = a\\ k_2 = b\\ k_3 = c\end{array}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (3,2,1,6) = (3,2,1)_{(1)}\\ \vec{u}_2 &= (2,-3,4,4) = (2,-3,4)_{(1)}\\ \vec{u}_3 &= (-5,6,7,-10) = (-5,6,7)_{(1)}\\ \vec{u}_4 &= (11,-13,11,22) = (11,-13,11)_{(1)}\end{aligned}$$

8 Kuželosečky

Definice
Nechť je v $\mathbb{E}_2$ dána afinní soustava souřadnic.
Množinu všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, jejíž souřadnice vyhovují rovnici:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (*),$$

kde $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0), a_{ij} \in \mathbb{R}$ nazveme kuželosečkou.

Matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ nazveme maticí kuželosečky.

Rovnici kuželosečky k si tedy můžeme přepsat do tohoto maticového tvaru

$$k\colon \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

Definice
Nevyhovují-li rovnici kuželosečky souřadnice žádného bodu, nazýváme jí kuželosečkou formálně reálnou (imaginární).
V opačném případě hovoříme o bodově reálné kuželosečce.

Definice
Bod S nazveme středem kuželosečky k, jestliže platí: $\forall X \in k$: $\exists X' \in k$: S je středem úsečky XX'.

Věta
Bod $S = [m, n]$ je středem kuželosečky k o rovnici $(*)$ $\Leftrightarrow$ jeho souřadnice m, n vyhovují soustavě St:

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13} &= 0 \\ a_{12}m + a_{22}n + a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Definice
Jestliže střed kuželosečky leží na kuželosečce, pak se nazývá singulárním bodem kuželosečky.

Věta
Bod $S = [m, n]$ je singulárním bodem kuželosečky k o rovnici $(*)$ $\Leftrightarrow$ jeho souřadnice m, n vyhovují soustavě Si:

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13} &= 0 \\ a_{12}m + a_{22}n + a_{23} &= 0 \\ a_{13}m + a_{23}n + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Soustavu Si můžeme přepsat do maticového tvaru: $A \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definice
Nechť k je kuželosečka o rovnici $(*)$ a A její matice.
Determinant $|A|$ nazýváme determinantem (diskriminantem) kuželosečky k.
Determinant $|A_m|$ matice $A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ nazýváme malým determinantem kuželosečky k.

Definice
Kuželosečka k se nazývá singulární, jestliže $|A| = 0$.
V opačném případě ($|A| \neq 0$) se kuželosečka k nazývá regulární.

Příklad

Napište matici kuželosečky, rozhodněte, zda je regulární či singulární, najděte její střed a singulární bod.

1.

$$k_1 : 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ k_1 \text{ je singulární}$$

$$S = [m, n]$$

$$\begin{array}{r} 2m - 3n - 1 = 0 \\ -3m + 5n + 1 = 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \ \Rightarrow \quad \begin{array}{r} n = 1 \\ 2m - 3 = 1 \ \Rightarrow \ m = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \ S = [2, 1]$$

$$-m + n + 1 = 0\text{:} \ -2 + 1 + 1 = 0\surd \ \Rightarrow \ S \text{ je singulární bod}$$

2.

$$k_2\text{: } y^2 - 4x + 2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \ \Rightarrow \ k_2 \text{ je regulární}$$

$$S = [m, n]$$

$$0m + 0n - 2 = 0 \text{ spor } \Rightarrow \text{ nemá střed } \Rightarrow \text{ nemá singulární bod}$$

3.

$$k_3\text{: } 2x^2 - xy - y^2 + 7x + 5y - 4 = 0 \ / \cdot 2$$

vynásobením nenulovým číslem dostáváme rovnici téže kuželosečky

$$k_3\text{: } 4x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 8 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ k_3 \text{ je singulární}$$

$$S = [m, n]$$

$$\begin{array}{r} 4m - n + 7 = 0 \\ -m - 2n + 5 = 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|r} 4 & -1 & -7 \\ -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -9 & -27 \end{array}\right) \ \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -9n = -27 & \Rightarrow & n = 3 \\ -m - 6 = -5 & \Rightarrow & m = -1 \end{array}$$

$$7m + 5n - 8 = 0\text{: } 7 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 - 8 = 0\surd \ \Rightarrow \ S \text{ je singulární bod}$$

Věta
Nechť k je regulární kuželosečka, bod $M=[m,n]\in k$.
Pak $\exists!$ tečna k, která má bod M za svůj bod dotyku.
Tato tečna má rovnici t: $\begin{pmatrix} m & n & 1 \end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=(0)$.

Příklad
Ověřte, zda je daná kuželosečka regulární a zda ji náleží bod M. Pokud ano, najděte její tečnu, jejíž dotykový bod je M.

$$k\colon 6x^2+14xy+10y^2+8x+10y+2=0,\quad M=[-1,0]$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=-8\ \Rightarrow\ k \text{ je regulární}$$

$$6\cdot(-1)^2+14\cdot(-1)\cdot 0+10\cdot 0^2+8\cdot(-1)+10\cdot 0+2=6-8+2=0\ \Rightarrow\ M\in k$$

$$t\colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=(0)$$

$$t\colon \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=(0)$$

$$t\colon -2x-2y-2=0$$

$$t\colon x+y+1=0$$

Definice
Přímku o nazveme osou bodově reálné regulární kuželosečky k, jestliže pro $\forall X\in k$: $\exists! X'\in k$:
střed úsečky $XX'\in o$, $XX'\perp o$.

Věta
Nechť k je bodově reálná regulární kuželosečka.
Pak platí, že přímka o s normálovým vektorem $\vec{o}=(o_1,o_2)$ je osou kuželosečky k $\Leftrightarrow$ vyhovuje rovnici

$$o\colon \begin{pmatrix} o_1 & o_2 & 0 \end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=(0),$$

kde čísla o_1,o_2 jsou řešením rovnice $\begin{pmatrix} o_1 & o_2 \end{pmatrix}\cdot(A_m-\lambda E)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj.
$\begin{pmatrix} o_1 & o_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. $o_1\cdot(a_{11}-\lambda)+o_2a_{12}=0\ \wedge\ o_1a_{12}+o_2\cdot(a_{12}-\lambda)=0$,
přičemž musí být splněna rovnice: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=|A_m-\lambda E|=0$.

Příklad
Ověřte, zda je daná kuželosečka regulární. Pokud ano, najděte její osy.

$$k\colon 2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -50 \;\Rightarrow\; k \text{ je regulární}$$

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-7-\lambda) - 36 = \lambda^2 + 5\lambda - 50 = (\lambda+10)\cdot(\lambda-5) = 0$$

i) $\lambda = -10$

$$\begin{pmatrix} o_1 & o_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-(-10) & -6 \\ -6 & -7-(-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} 12o_1 - 6o_2 = 0 \\ -6o_1 + 3o_2 = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; 2o_1 = o_2 \;\Rightarrow\; \vec{o}_1 = (1,2)$$

$$o_1\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

$$o_1\colon \begin{pmatrix} -10 & -20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

$$o_1\colon -10x - 20y + 10 = 0$$

$$o_1\colon x + 2y - 1 = 0$$

ii) $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} o_3 & o_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-5 & -6 \\ -6 & -7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} -3o_3 - 6o_4 = 0 \\ -6o_3 - 12o_4 = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; o_3 = 2o_4 \;\Rightarrow\; \vec{o'} = (2,1)$$

$$o'\colon \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

$$o'\colon \begin{pmatrix} -2 & -19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

$$o'\colon -2x - 19y + 11 = 0$$

9 Kvadriky

Definice
Nechť je v $\mathbb{E}_3$ dána afinní soustava souřadnic.
Množinu všech bodů $X \in \mathbb{E}_3$, jejíž souřadnice vyhovují rovnici:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (**),$$

kde $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}) \neq (0,0,0,0,0,0)$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ nazveme kvadrikou.

Matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$ nazveme maticí kvadriky.

Definice
Nechť k je kvadrika o rovnici $(**)$ a A její matice.
Determinant $|A|$ nazýváme determinantem (diskriminantem) kvadriky k.

Definice
Kvadrika k se nazývá singulární, jestliže $|A| = 0$.
V opačném případě ($|A| \neq 0$) se kvadrika k nazývá regulární.

Příklad
Rozhodněte, zda je daná kvadrika regulární či singulární.

1.

$$k_1\colon x^2 + 4xy + 2xz - y^2 - 2yz + 3z^2 + 4x - 4y + 3 = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \mathbf{2} \\ 2 & -1 & -1 & \mathbf{-2} \\ 1 & -1 & 3 & \mathbf{0} \\ 2 & -2 & 0 & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+0 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 6 - 2 \cdot 18 - 0 + 3 \cdot (-19) = -105 \;\Rightarrow\; k_1 \text{ je regulární}$$

2.

$$k_2\colon (x-2)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 2^2$$

jedná se o rovnici kulové plochy se středem $S = [2, -4, 0]$, poloměrem $2j$

$$k_2\colon x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 + z^2 - 4 = 0$$

$$k_2\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 16 = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -2 & 4 & \mathbf{0} & 16 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 - 4 - 0 = -4 \;\Rightarrow\; k_2 \text{ je regulární}$$

Závěr

Tato práce shrnuje základní definice a vztahy mezi maticemi a determinanty, a ukazuje nejrůznější oblasti středoškolské matematiky, kde se matic využívá. Teorie je doplněna příklady, na nichž je tato teorie ilustrována. Vše je formulováno tak, aby tomu středoškolský student rozuměl, protože zejména na něj je tato práce cílena.

Résumé

This paper summarizes the basic definitions and relations between matrices and determinants, and shows different areas of high school mathematics, where the matrices are used. The theory is supplemented by examples in which this theory is illustrated. Everything is formulated so that a high school student could understand it, because this paper is determined especially for him.

Reference

[1] Sešity z předmětu matematika z let 2007-11, vyučují Mgr. Aleš Kobza Ph.D.

[2] Bartsch, H. J., *Matematické vzorce*,
1. vydání, SNTL, Praha, 1983

[3] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J., *Metody řešení matematických úloh I*,
2. vydání, SPN, Brno, 2001, ISBN 80-210-1202-1